

Recorrências

Muitas vezes não é possível resolver problemas de contagem diretamente combinando os princípios aditivo e multiplicativo. Para resolver esses problemas recorreremos a outros recursos: as *recursões* ou *recorrências*. A principal ideia por trás das recursões é expressar uma quantidade x_n em função de quantidades anteriores $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1$.

1. Obtendo recursões

O nosso primeiro exemplo *pode* ser resolvido com o princípio multiplicativo, mas é a maneira mais fácil de começar.

Exemplo 1.1.

Quantas são as sequências com n letras, cada uma igual a a , b ou c ?

Resolução

Sabemos que, do princípio multiplicativo, a resposta é 3^n . Mas vamos resolver esse problema sob a ótica das recursões: seja x_k a quantidade de sequências com k letras nas condições do enunciado. Como podemos obter uma sequência com n letras? Simples: colocamos uma nova letra depois de uma sequência com $n-1$ letras! Assim, como há três possibilidades para a última letra e x_{n-1} para a sequência de $n-1$ letras, $x_n = 3 \cdot x_{n-1}$. Além disso, como só há uma sequência vazia, $x_0 = 1$. Assim, chegamos à recursão

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_n = 3x_{n-1} \end{cases}$$

Como resolver essa recursão? Observe que $\frac{x_k}{x_{k-1}} = 3$ para todo k , de modo que

$$x_n = \frac{x_n}{x_{n-1}} \cdot \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} \cdot \dots \cdot \frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{x_1}{x_0} \cdot x_0 = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 3}_{n \text{ vezes}} \cdot 1 = 3^n$$

Exemplo 1.2.

Quantas são as sequências com n letras, cada uma igual a a , b ou c , de modo que não há duas letras a seguidas?

Resolução

Seja x_k a quantidade de sequências com k letras nas condições do enunciado. Observemos uma sequência de n letras. O que acontece se tiramos a última letra? Agora depende: se a última letra não é a (sendo então igual a b ou c) não há restrições para a sequência de $n-1$ letras que sobrou, totalizando $2 \cdot x_{n-1}$ possibilidades; se a última letra é a então a última letra da sequência de $n-1$ que sobrou **não** é a , ou seja, essa sequência termina em b ou c . Além disso, não há restrições adicionais para a sequência de $n-2$ letras que sobrou, obtendo nesse caso um total de $2 \cdot x_{n-2}$ sequências.

$$x_n \begin{cases} \nearrow & \frac{x_{n-1}}{2} \cdot \frac{2}{1} & 2x_{n-1} \\ & \cup & + \\ \searrow & \frac{x_{n-2}}{2} \cdot \frac{2}{1} & 2x_{n-2} \end{cases}$$

Assim, $x_n = 2x_{n-1} + 2x_{n-2}$. Note que para calcular $x_2 = 2x_1 + 2x_0$ precisamos dos valores de x_0 e x_1 . Como essas palavras têm menos de duas letras, não há restrições, ou seja, $x_0 = 1$ e $x_1 = 3$. Obtemos, então, a recursão

$$\begin{cases} x_0 = 1, x_1 = 3 \\ x_n = 2x_{n-1} + 2x_{n-2} \end{cases}$$

Vale a pena conferir um caso pequeno: para $n = 2$ há $3^2 - 1 = 8$ possibilidades (todas menos aa). De fato, $8 = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \iff x_2 = 2x_1 + 2x_0$.

Depois veremos como resolver essa recursão.

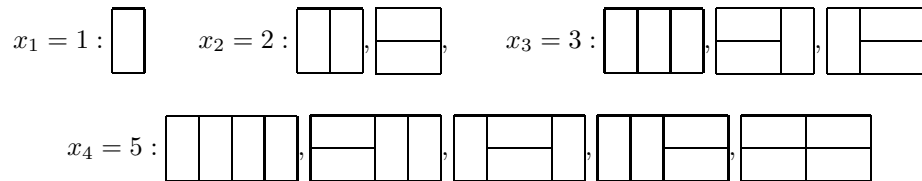
É claro que não podemos deixar de incluir os famosos números de Fibonacci:

Exemplo 1.3.

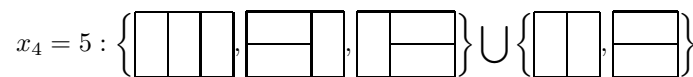
De quantas maneiras podemos guardar n dominós 2×1 em uma caixa $2 \times n$?

Resolução

Seja x_n o número de maneiras de distribuir os n dominós na caixa. Vejamos alguns casos pequenos: primeiro, $x_0 = 1$,



Lembrando que a ideia em recursão é obter cada valor em função dos anteriores, vejamos o que ocorre quando tiramos a última parte do caso $n = 4$:



Note que ao tirarmos o “fim” de cada possibilidade, obtemos uma possibilidade menor. Como os “fins” têm tamanho 1 ou 2, reduz-se ao caso anterior ou pré-anterior, de modo que $x_4 = x_3 + x_2$. É claro que isso pode ser generalizado para

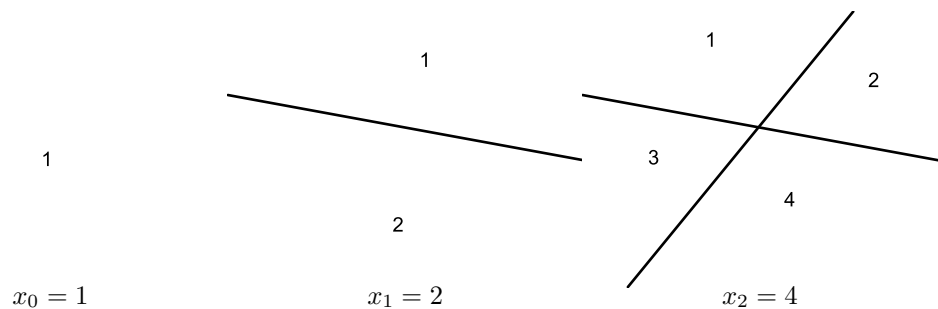
$$\begin{cases} x_0 = 1, x_1 = 1 \\ x_n = x_{n-1} + x_{n-2} \end{cases}$$

Exemplo 1.4.

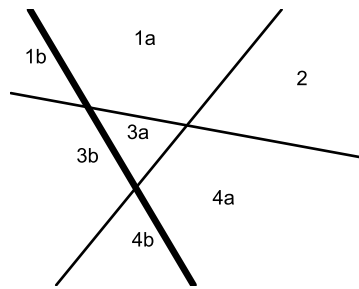
Em no máximo quantas regiões n retas cortam o plano?

Resolução

Antes, vejamos alguns casos pequenos. Sendo x_n o número máximo de regiões determinadas por n retas:



Parece que $x_n = 2^n$, não? Não tão rápido: para $n = 3$ temos uma surpresa: adicionando uma terceira reta, vemos que ela não pode cortar todas as regiões anteriores:



O que aconteceu? A reta cortou 3 regiões em vez de 4 e obtivemos $x_3 = 7$. Pensando um pouco, vemos que isso é o melhor que podemos fazer mesmo: a nova reta vai ser cortada no máximo uma vez por cada uma das outras duas retas. Cada corte é uma “mudança de região”, de modo que essas duas mudanças implicam três novas regiões. Assim, $x_3 = x_2 + 3$.

Pensando ainda mais um pouco, não é difícil generalizar: ao colocarmos a n -ésima reta, ela vai ser cortada no máximo $n - 1$ vezes, gerando $n - 1$ “mudanças de região” e, portanto, n novas regiões, de modo que $x_n = x_{n-1} + n$. Observando o caso pequeno $x_0 = 1$, temos a recursão

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_n = x_{n-1} + n \end{cases}$$

1.1. Utilizando recursões auxiliares

Da mesma forma que utilizamos sistemas de equações no lugar de uma única equação para resolver problemas, às vezes pode ser mais fácil obter um sistema de recursões.

Exemplo 1.5.

O DNA marciano é formado por sequências de cinco proteínas chamadas a, b, c, d, e . Nas sequências, nunca aparecem cd, ce, ed e ee . Todas as outras possibilidades são permitidas. Quantas são as possíveis sequências de DNA marciano com n proteínas?

Resolução

Note que se tentarmos obter uma recorrência teremos problemas quando a última proteína for d ou e : a penúltima não pode ser c ou e . Então sejam a_n a quantidade de sequências de n proteínas que não terminam com c ou e e b_n a quantidade de sequências que terminam com c ou e . Queremos $a_n + b_n$.

Observe que $a_n = 3(a_{n-1} + b_{n-1})$, já que não há restrições sobre a penúltima letra e podemos colocar a, b ou d no final da sequência. Além disso, podemos colocar c no final de qualquer uma das $a_{n-1} + b_{n-1}$ sequências de $n - 1$ proteínas e e no final de qualquer uma das a_{n-1} sequências que não termine com c ou e , ou seja, $b_n = (a_{n-1} + b_{n-1}) + a_{n-1} = 2a_{n-1} + b_{n-1}$. Observando que $a_0 = 1$ e $b_0 = 0$ (veja que a sequência vazia **não** termina com c ou e), temos o sistema

$$\begin{cases} a_0 = 1, b_0 = 0 \\ a_n = 3a_{n-1} + 3b_{n-1} \\ b_n = 2a_{n-1} + b_{n-1} \end{cases}$$

Note que, de fato, $a_1 = 3$ e $b_1 = 2$. Como resolver esse sistema? Nesse caso, basta “isolar” as variáveis:

$$\begin{cases} a_0 = 1, b_0 = 0 \\ a_n = 3a_{n-1} + 3b_{n-1} \\ b_n = 2a_{n-1} + b_{n-1} \end{cases} \iff \begin{cases} a_0 = 1, b_0 = 0 \\ b_{n-1} = \frac{a_n - 3a_{n-1}}{3} \\ a_{n-1} = \frac{b_n - b_{n-1}}{2} \end{cases}$$

Como as equações valem **para todo** n , obtemos as recursões:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = 1, b_0 = 0 \\ b_{n-1} = \frac{a_n - 3a_{n-1}}{3} \\ a_{n-1} = \frac{b_n - b_{n-1}}{2} \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} a_0 = 1, b_0 = 0 \\ b_{n-1} = \frac{\frac{b_{n+1}-b_n}{2} - 3\frac{b_n-b_{n-1}}{2}}{3} \\ a_{n-1} = \frac{\frac{a_{n+1}-3a_n}{3} - \frac{a_n-3a_{n-1}}{3}}{2} \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} a_0 = 1, b_0 = 0 \\ b_{n+1} = 4b_n + 3b_{n-1} \\ a_{n-1} = 4a_n + 3a_{n-1} \end{array} \right.$$

1.2. Convoluções

Algumas recursões envolvem **todos** os termos anteriores.

Exemplo 1.6.

De quantas maneiras podemos ordenar n pares de parêntesis? Todos os parêntesis interiores a um par de parêntesis devem ser fechados. Por exemplo, as sequências $((())())$ e $()()((()))$ são permitidas (elas são, na ordem, 12332441 e 1122344553) mas $()()()$ e $)()()$ não são permitidas (pois fecham parêntesis que não foram abertos).

Resolução

Novamente, casos pequenos. Para $n = 0$, temos uma maneira: a vazia; para $n = 1$, uma maneira: $()$. Para $n = 2$, temos duas maneiras: $()()$ e $((()))$. Para $n = 3$, cinco maneiras: $()()()$, $()(())$, $((())())$, $((())())$ e $((()))$.

Para obter a recursão, pensamos no último par de parêntesis, vimos o que está dentro dele e o que está à esquerda dele. Para $n = 3$, temos

$$()()(\emptyset), \quad ()(()), \quad ((\emptyset))(\emptyset), \quad \emptyset((\emptyset)), \quad \emptyset((()))$$

Note que pode haver o conjunto vazio, um par ou dois pares de parêntesis dentro do último par. Nesses casos, há dois, um e zero pares de parêntesis à esquerda, respectivamente, de modo que $a_3 = a_0a_2 + a_1a_1 + a_2a_0$. Novamente, podemos generalizar, obtendo

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_n = a_0a_{n-1} + a_1a_{n-2} + a_2a_{n-3} + \cdots + a_{n-1}a_0 \end{cases}$$

Recursões desse tipo são chamadas *convoluções*.

2. Resolvendo recursões

Como resolver as recursões acima? Para isso há várias técnicas, algumas das quais veremos agora. Não é a intenção desse artigo esgotar todas as técnicas. Para algo mais detalhado, veja [1].

2.1. Somatórios

Vamos resolver o problema das retas no plano, cuja recorrência é

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_n = x_{n-1} + n \end{cases}$$

Essa é bastante simples, pois é possível “telescoper” a soma:

$$\begin{array}{r}
 x_n - x_{n-1} = n \\
 x_{n-1} - x_{n-2} = n - 1 \\
 x_{n-2} - x_{n-3} = n - 2 \\
 \vdots \\
 x_2 - x_1 = 2 \\
 x_1 - x_0 = 1 \\
 \hline
 x_n - x_0 = 1 + 2 + \dots + n
 \end{array}$$

Assim, basta calcular a soma $1 + 2 + \dots + n$, que é conhecida e igual a $\frac{n(n+1)}{2}$, ou seja,

$$x_n = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$$

2.2. Recursões lineares homogêneas

Recursões do tipo $x_n = a_{n-1}x_{n-1} + a_{n-2}x_{n-2} + \dots + a_{n-k}x_{n-k}$, em que os a_i 's e k são constantes, são denominadas *recursões lineares homogêneas* e têm um método geral de resolução. Ilustraremos esse método geral com exemplos.

Para você poder resolver esse tipo de recursão vale a pena saber que, para $a \neq b$,

$$a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1} = \frac{a^n - b^n}{a - b}$$

Exemplo 2.1.

Resolva a recursão

$$\begin{cases} x_0 = 2, x_1 = 5 \\ x_n = 5x_{n-1} - 6x_{n-2} \end{cases}$$

Resolução

Definimos a *equação característica* da recursão a equação obtida quando “transformamos subscrito em expoente”. No nosso exemplo, é $x^n = 5x^{n-1} - 6x^{n-2} \iff x^2 - 5x + 6 = 0 \iff x = 2$ ou $x = 3$ (não estamos interessados nas raízes nulas). Mas o que interessa é a seguinte conta, que pode ser feita também com a recursão:

$$\begin{array}{l} x^n - 5x^{n-1} + 6x^{n-2} = 0 \\ \iff x^n - 2x^{n-1} = 3(x^{n-1} - 2x^{n-2}) \end{array} \left| \begin{array}{l} x_n - 5x_{n-1} + 6x_{n-2} = 0 \\ \iff x_n - 2x_{n-1} = 3(x_{n-1} - 2x_{n-2}) \end{array} \right.$$

Seja $y_n = x_n - 2x_{n-1}$. Então $y_n = 3y_{n-1}$ e temos $y_n = 3^{n-1}y_1 = 3^{n-1}(x_1 - 2x_0) = 3^{n-1}(5 - 2 \cdot 2) = 3^{n-1}$. Deste modo, $x_n - 2x_{n-1} = 3^{n-1}$ e forçamos uma soma telescópica:

$$\begin{array}{r}
 x_n - 2x_{n-1} = 3^{n-1} \\
 2x_{n-1} - 2^2x_{n-2} = 3^{n-2}2 \\
 2^2x_{n-2} - 2^3x_{n-3} = 3^{n-3}2^2 \\
 \vdots \\
 2^{n-1}x_1 - 2^n x_0 = 2^{n-1} \\
 \hline
 x_n - 2^n x_0 = 3^{n-1} + 3^{n-2}2 + 3^{n-3}2^2 + \dots + 2^{n-1}
 \end{array}$$

Assim, $x_n - 2^n \cdot 2 = \frac{3^n - 2^n}{3-2} \iff x_n = 2^n + 3^n$.

Isso pode ser generalizado: se $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ são as raízes distintas da equação característica, então existem constantes c_1, c_2, \dots, c_k tais que

$$x_n = c_1 \alpha_1^n + c_2 \alpha_2^n + \dots + c_k \alpha_k^n$$

O que acontece quando há raízes múltiplas?

Exemplo 2.2.

Resolva a recursão

$$\begin{cases} x_0 = 2, x_1 = 5 \\ x_n = 4x_{n-1} - 4x_{n-2} \end{cases}$$

Resolução

Utilizamos o mesmo truque: a equação característica é $x^n = 4x^{n-1} - 4x^{n-2} \iff x = 2$, uma raiz dupla. Seguimos com a fatoração

$$x_n - 2x_{n-1} = 2(x_{n-1} - 2x_{n-2})$$

Sendo $y_n = x_n - 2x_{n-1}$, temos $y_n = 2y_{n-1}$, ou seja, $y_n = 2^{n-1}y_1 = 2^{n-1}$. Mas o mais interessante é o que ocorre ao forçamos a telescópica:

$$\begin{aligned} x_n - 2x_{n-1} &= 2^{n-1} \\ 2x_{n-1} - 2^2x_{n-2} &= 2^{n-2}2 = 2^{n-1} \\ 2^2x_{n-2} - 2^3x_{n-3} &= 2^{n-3}2^2 = 2^{n-1} \\ &\vdots \\ \frac{2^{n-1}x_1 - 2^n x_0}{x_n - 2^n x_0} &= \frac{2^{n-1}}{n \cdot 2^{n-1}} \end{aligned}$$

Assim, $x_n = 2^n(2 + n/2)$. Na verdade, com uma indução pode-se provar o seguinte

Teorema 2.1. *Se a equação característica de uma recursão linear tem raízes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ com multiplicidades m_1, m_2, \dots, m_k respectivamente, então existem polinômios p_1, p_2, \dots, p_k , de graus $m_1 - 1, m_2 - 1, \dots, m_k - 1$ respectivamente e coeficientes constantes tais que*

$$x_n = p_1(n)\alpha_1^n + p_2(n)\alpha_2^n + \dots + p_k(n)\alpha_k^n$$

Você pode aplicar diretamente o teorema sem demonstrar. Por exemplo, vamos resolver o problema dos dominós, cuja recursão é

$$\begin{cases} x_0 = 1, x_1 = 1 \\ x_n = x_{n-1} + x_{n-2} \end{cases}$$

A equação característica é $x^n = x^{n-1} + x^{n-2} \iff x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ou $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Então existem constantes A e B (vamos simplificar notação!) tais que

$$x_n = A \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + B \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Para obter A e B , substituímos n por 0 e 1, obtendo

$$\begin{cases} 1 = A + B \\ 1 = A \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) + B \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) \end{cases} \iff \begin{cases} A = \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\ B = -\frac{1 - \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \end{cases}$$

Assim,

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right)$$

2.3. Recursões lineares “quase” homogêneas

Quando temos alguma constante (ou algo não tão constante), podemos reduzir o problema a uma recursão linear. Por exemplo, considere a recursão

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2} + 2$$

Seja $x_n = y_n + c$, c constante. Então

$$y_n + c = y_{n-1} + c + y_{n-2} + c + 2 \iff y_n = y_{n-1} + y_{n-2} + c + 2$$

Fazendo $c + 2 = 0 \iff c = -2$, obtemos uma recursão linear homogênea.

Outro exemplo: se

$$x_n = 4x_{n-1} - 3x_{n-2} + 2^n$$

isolamos 2^n e lembramos que 2^n satisfaz $y_n = 2y_{n-1}$:

$$\begin{aligned} x_n = 4x_{n-1} - 3x_{n-2} + 2^n &\iff x_n - 4x_{n-1} + 3x_{n-2} = 2^n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2(x_{n-1} - 4x_{n-2} + 3x_{n-3}) \\ &\implies x_n = 6x_{n-1} - 11x_{n-2} + 6x_{n-3} \end{aligned}$$

Note que 2 é raiz da equação característica $x^n = 6x^{n-1} - 11x^{n-2} + 6x^{n-3}$. Isso não é coincidência!

2.4. Convoluções e funções geratrizes

Uma recursão interessante é a dos parêntesis:

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_n = a_0 a_{n-1} + a_1 a_{n-2} + a_2 a_{n-3} + \dots + a_{n-1} a_0 \end{cases}$$

Para resolver essa recursão utilizaremos uma *função geratriz*. Considere a *série formal* (por enquanto, não se preocupe com nomes!)

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

A ideia é achar todos os termos dessa série. Fazemos contas como se fossem polinômios. Por exemplo,

$$(f(x))^2 = a_0^2 + (a_0 a_1 + a_1 a_0)x + (a_0 a_2 + a_1 a_1 + a_2 a_0)x^2 + (a_0 a_3 + a_1 a_2 + a_2 a_1 + a_3 a_0)x^3 + \dots$$

Familiar? Sim! Obtemos a recorrência, de modo que

$$(f(x))^2 = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + \dots$$

Parece a mesma coisa, mas um pouco deslocada? Basta multiplicar por x :

$$x(f(x))^2 = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots = f(x) - a_0$$

Lembrando que $a_0 = 1$, obtemos a “equação do segundo grau”

$$x(f(x))^2 - f(x) + 1 = 0 \iff f(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$$

Que sinal adotar? Substitua $x = 0$: devemos obter $f(0) = a_0 = 1$. Se adotamos $+$, obtemos $f(0) \rightarrow \infty$, o que não é possível. Logo o sinal certo é $-$, ou seja,

$$f(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$$

Agora temos que transformar essa conta em série. Para isso, utilizamos o *binômio de Newton generalizado*:

$$(x+y)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^{\alpha-k} y^k$$

em que

$$\binom{\alpha}{0} = 1, \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}, k > 0$$

Por exemplo, para $k > 0$,

$$\begin{aligned} \binom{\frac{1}{2}}{k} &= \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-k+1)}{k!} = \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{2}\right)^{k-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{k!} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{2}\right)^{k-1} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdots (2k-3) \cdot (2k-2)}{k! \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k-2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{2}\right)^{k-1} \frac{(2k-2)!}{k! \cdot 2^{k-1} (k-1)!} \\ &= \frac{1}{2k} \left(\frac{-1}{4}\right)^{k-1} \binom{2k-2}{k-1} \end{aligned}$$

Com isso,

$$(1-4x)^{1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} 1^{1/2-k} (-4x)^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k} \left(\frac{-1}{4}\right)^{k-1} \binom{2k-2}{k-1} (-4x)^k = 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \binom{2k-2}{k-1} x^k$$

e podemos desenvolver a série:

$$f(x) = \frac{1 - (1-4x)^{1/2}}{2x} = \frac{1 - (1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \binom{2k-2}{k-1} x^k)}{2x} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \binom{2k-2}{k-1} x^{k-1}$$

Assim,

$$f(x) = \frac{1}{1} \binom{0}{0} + \frac{1}{2} \binom{2}{1} x + \frac{1}{3} \binom{4}{2} x^2 + \dots + \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} x^n + \dots$$

e concluímos que

$$a_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

Esses números são conhecidos como *números de Catalan*.

3. Estimativas

Às vezes as recursões são muito difíceis. Então vale mais a pena fazer algumas estimativas. Nesses casos, uma contagem com recursões e exclusão de casos desfavoráveis (“tudo menos o que não interessa”) costumam dar conta do recado.

Nos próximos exemplos, trabalharemos com *palavras*, que são simplesmente seqüências de símbolos pertencentes a um conjunto Σ . A recursão normalmente funciona assim:

- Seja x_n a quantidade de palavras com comprimento n que têm a propriedade desejada. Vamos estimar x_{n+1} em função dos termos anteriores.
- Sendo $k = |\Sigma|$, então $x_{n+1} = kx_n - p$, sendo p a quantidade de palavras proibidas formadas com a adição de um símbolo no final das x_n palavras permitidas com comprimento n .
- Normalmente, p é estimado (por cima) em função dos termos anteriores e montamos uma desigualdade recursiva.
- Tentamos provar por indução que $x_{n+1} \geq c \cdot x_n$ para algum $c > 1$. Para isso, usamos a desigualdade recursiva.

Vamos ver direito como isso funciona.

Exemplo 3.1.

Seja $\Sigma = \{a, b, c\}$. Algumas seqüências, cada uma com duas ou mais letras, são proibidas. Uma palavra é *permitida* quando não contém seqüências proibidas. Sabe-se que não há duas ou mais seqüências proibidas de mesmo comprimento. Prove que existem palavras permitidas de qualquer tamanho.

Resolução

Seja x_n a quantidade de palavras permitidas de tamanho n . Temos então que provar que $x_n > 0$.

Vamos estimar x_{n+1} . Colocando uma letra à direita de uma palavra permitida de tamanho n , obtemos $3x_n$ palavras. Todavia, podemos formar uma seqüência proibida no final, e devemos excluir casos. Seja então y_k o número de palavras formadas com a palavra proibida de tamanho k no final. Então

$$x_{n+1} = 3x_n - (y_1 + y_2 + \cdots + y_n)$$

Vamos estimar y_i . Note que ao tirarmos a seqüência proibida de tamanho i , obtemos uma palavra permitida de $n - i$ letras. Logo $y_i \leq x_{n-i}$. Note que não necessariamente ocorre a igualdade porque pode ser que nem toda palavra permitida de $n - i$ letras seja gerada pela retirada da seqüência proibida. Portanto, fazendo $x_0 = 1$,

$$x_{n+1} \geq 3x_n - (x_{n-1} + x_{n-2} + \cdots + x_0)$$

Suponha que $x_{k+1} \geq m \cdot x_k$ para todo k . Vamos encontrar um valor de $m > 1$. Temos $x_n \geq m^i \cdot x_{n-i} \iff x_{n-i} \leq x_n / m^i$. Assim,

$$x_{n+1} \geq 3x_n - (x_n/m + x_n/m^2 + \cdots + x_n/m^n)$$

Aí, em vez de resolver uma inequação polinomial de grau n (onde n varia!), vamos fazer mais uma estimativa:

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{m^2} + \cdots + \frac{1}{m^n} < \frac{1}{m} + \frac{1}{m^2} + \cdots = \frac{1/m}{1 - 1/m} = \frac{1}{m - 1}$$

Logo

$$x_{n+1} > 3x_n - x_n/(m - 1) = \frac{3m - 4}{m - 1} x_n$$

Basta então que

$$\frac{3m - 4}{m - 1} \geq m \iff m^2 - 4m + 4 \leq 0 \iff m = 2$$

Assim, $x_{n+1} \geq 2x_n$ para todo n natural e, deste modo, $x_n \geq 2^n$. Logo há palavras permitidas de qualquer tamanho. ■

Exercícios

01. Resolva todas as recursões que faltam ser resolvidas nos exemplos.
02. Em no máximo quantas regiões n planos dividem o espaço?
03. De quantas maneiras podemos guardar $3n$ dominós 2×1 em uma caixa $3 \times 2n$?
04. De quantas maneiras podemos guardar $2n$ blocos $2 \times 1 \times 1$ em uma caixa $2 \times 2 \times n$?
05. De quantas maneiras podemos dividir um polígono convexo de $n + 2$ lados em n triângulos?
06. Prove que existem pelo menos 8^n números de n algarismos sem dois blocos consecutivos iguais de algarismos.
07. Seja $\Sigma = \{a, b, c, d\}$. Uma palavra é dita *complicada* quando contém dois blocos consecutivos iguais. Caso contrário, a palavra é dita *simples*. Por exemplo, *badcabad* é simples e *baba* é complicada. Prove que há pelo menos 2^n palavras simples de tamanho n .
08. Seja $\Sigma = \{A; B\}$ e seja P um conjunto de 6 palavras, cada uma com quatro letras de Σ . Uma palavra é *permitida* se não contém uma seqüência de letras de P . Prove que se o conjunto de palavras permitidas é finito então o comprimento de cada palavra permitida é no máximo 10. Encontre um exemplo para P que forneça um conjunto finito de palavras permitidas com comprimento máximo 10.

4. Referências Bibliográficas

- [1] Todas as ideias e técnicas foram retiradas ou inspiradas no livro *Concrete Mathematics*, de Knuth, Graham e Patashnik.