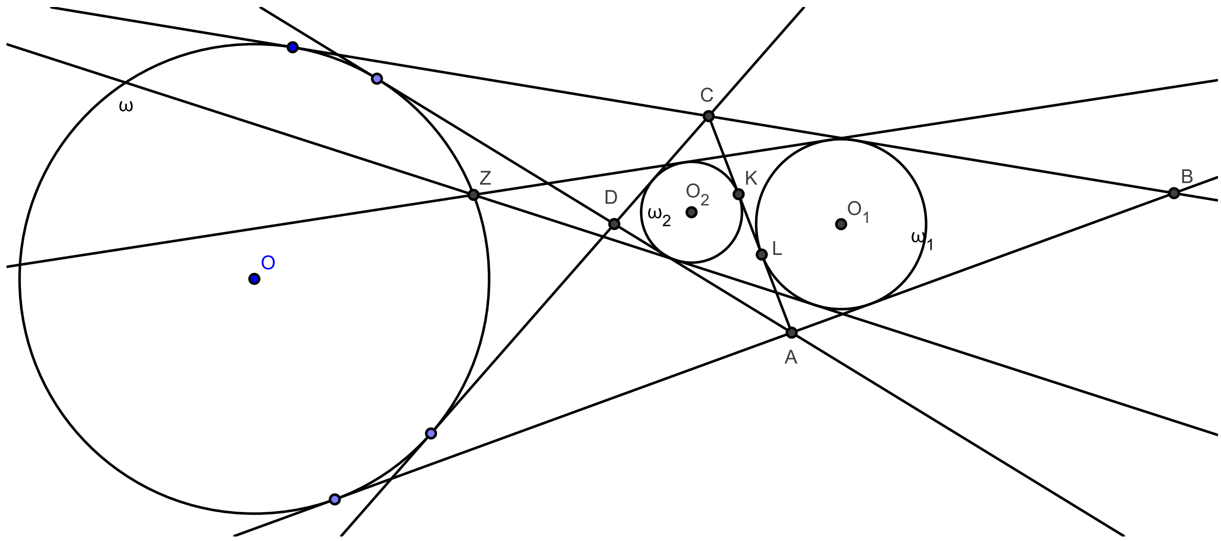
Homotetias, composição de homotetias e o problema 6 da IMO 2008

Antes de começar a discussão, vamos enunciar o problema 6 da IMO 2008, que é a motivação principal desse artigo.

Problema 6, IMO 2008. *Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo cujos lados BA e BC têm comprimentos diferentes. Sejam ω_1 e ω_2 as circunferências inscritas nos triângulos ABC e ADC, respectivamente. Suponhamos que existe uma circunferência ω tangente à reta BA de forma que A está entre B e o ponto de tangência, tangente à reta BC de forma que C está entre B e o ponto de tangência, e que também seja tangente às retas AD e CD. Prove que as tangentes comuns exteriores a ω_1 e ω_2 se intersectam sobre ω.*

É claro que um problema de geometria não pode ficar sem um bom desenho. É razoavelmente difícil desenhar a figura do problema e sugerimos que o leitor tente fazê-lo por conta própria (dica: comece com o círculo ω). Não se perca: queremos provar que o ponto Z está sobre a circunferência ω.



Quem já estudou homotetia já deve ter enxergado diversas homotetias entre as circunferências, mas muitos dos mais poderosos olímpicos do mundo foram derrotados por esse problema. De fato, dos 535 estudantes que participaram da IMO 2008, somente 13 resolveram (um deles fez 6 pontos) e 53 conseguiram pelo menos um ponto. Isto quer dizer que mais de 90% dos estudantes zeraram o problema!

Isso é sinal de que esse problema deve ter algo novo para ser explorado. De fato, uma transformação geométrica que esteve em voga nos anos 80 e desapareceu nos anos 90 foi a homotetia. E ela voltou, discretamente em 2007 e com tudo em 2008!

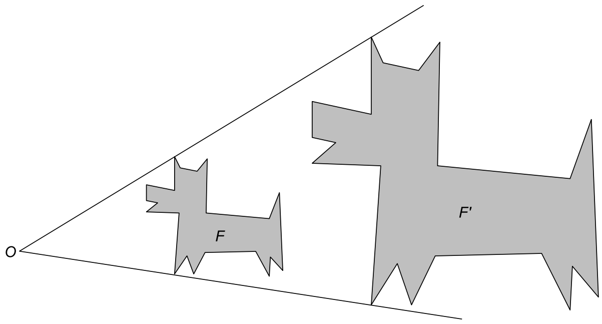
Vamos definir homotetia, ver algumas de suas propriedades e expandir as idéias envolvidas nessa transformação.

1. Homotetia: definição

Você vai ver que homotetia nada mais é do que "fazer sombrinha". Aparecem muitos paralelismos, mas o mais interessante são as colinearidades que irão aparecer. No início parece mágica; mas um bom matemático sempre revela seus truques!

Vamos começar com a definição de *homotetia com razão positiva* ou *homotetia direta*:

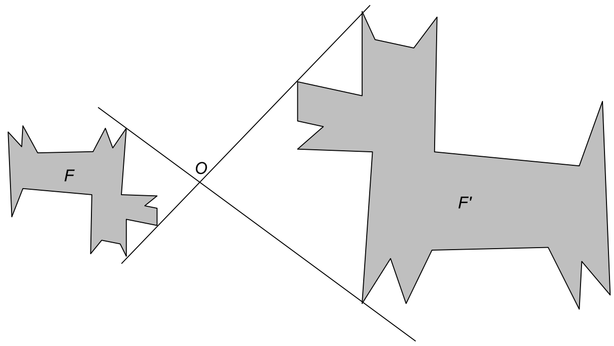
Definição 1.1. *Homotetia de uma figura $\mathcal{F}$ com centro O e razão k, sendo k um número real positivo, é uma transformação geométrica que associa a cada ponto P de $\mathcal{F}$ o ponto P' sobre a semi-reta OP, de origem O, tal que $OP' = k \cdot OP$.*



Talvez com vetores seja mais interessante: sendo O o centro da homotetia, o ponto P é transformado no ponto P' de modo que $\overrightarrow{OP'} = k \cdot \overrightarrow{OP}$. Note que a homotetia é uma função σ que leva pontos do plano (ou do espaço, se você estiver trabalhando em dimensões maiores) a pontos do plano (espaço). De fato, podemos fazer $P' = \sigma(P)$, tal que $\sigma(P) - O = k \cdot (P - O) \iff \sigma(P) = O + k \cdot (P - O)$.

Com isso, podemos definir homotetias para k negativo também, obtendo as chamadas *homotetias de razão negativa* ou *homotetias inversas*:

Definição 1.2. *Homotetia de uma figura $\mathcal{F}$ com centro O e razão k, sendo k um número real negativo, é uma transformação geométrica que associa a cada ponto P de $\mathcal{F}$ o ponto P' sobre a reta OP, de origem O, tal que $\overrightarrow{OP'} = k \cdot \overrightarrow{OP}$.*



Note que imagens de homotetias inversas ficam "de cabeça para baixo".

2. Propriedades da homotetia

As principais propriedades de homotetias têm a ver com colinearidade e concorrência. Algumas têm a ver com paralelismo.

2.1. Colinearidade

- *O centro de homotetia, o ponto e seu transformado são colineares. Em outras palavras, O, P e $P' = \sigma(P)$ são colineares.* Isso decorre diretamente da definição, mas homotetias não vêm de graça! Normalmente as encontramos nos problemas e, com essa propriedade, obtemos pontos colineares.

2.2. Concorrência

- *O centro de homotetia pertence a todas as retas que ligam pontos a seus transformados. Em outras palavras, O pertence a toda reta do tipo $PP' = P\sigma(P)$.* Novamente, uma propriedade que decorre diretamente da definição (na verdade, é a mesma da colinearidade!), mas que aparece quando descobrimos alguma homotetia.

2.3. Paralelismo

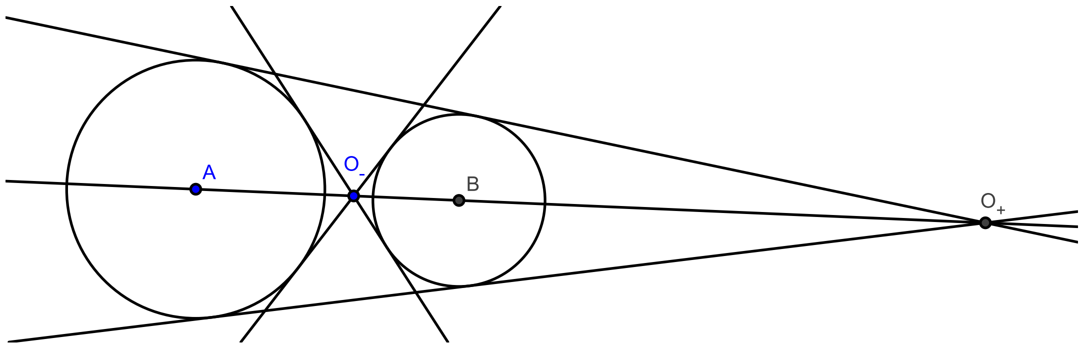
- *A reta que liga dois pontos é paralela à reta que liga os seus transformados. Em outras palavras, PQ e $P'Q' = \sigma(P)\sigma(Q)$ são paralelas.* A demonstração desse fato vem da semelhança entre OPQ e $OP'Q'$ (pelo caso LAL!).

- *Dois triângulos com lados respectivamente paralelos são homotéticos.* Para provar isso, sendo ABC e DEF os triângulos com AB, DE, AC, DF e BC, EF respectivamente paralelos, use o teorema de Desargues para provar que esses triângulos são perspectivos.

Em particular, algumas figuras são sempre semelhantes: os círculos! Com isso, temos a seguinte propriedade:

2.4. Círculos

- *Dois círculos são sempre homotéticos.* Com exceção de círculos concêntricos, eles admitem duas homotetias, uma direta e uma inversa. No caso de círculos disjuntos, os centros de homotetias são fáceis de encontrar: são as interseções das tangentes comuns internas (inversa) e das tangentes comuns externas (direta).



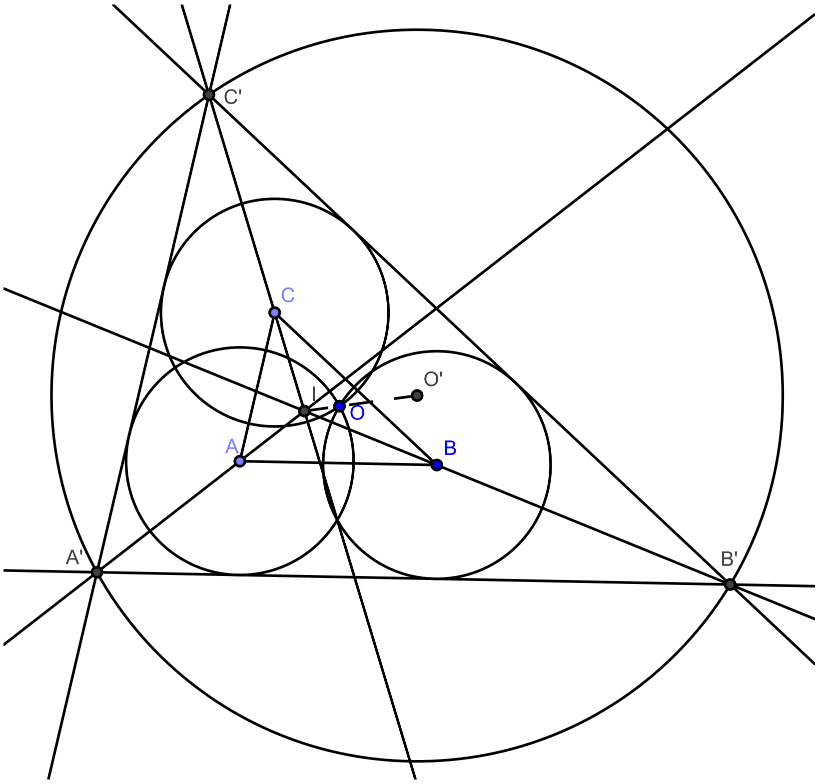
Com isso, podemos resolver alguns problemas. Homotetia esteve bastante na moda na IMO durante o início dos anos 80, como você vai ver nos exemplos e nos exercícios.

Exemplo 2.1.

Problema 5, IMO 1981. *Três círculos congruentes têm um ponto comum O e estão no interior de um triângulo. Cada círculo é tangente a dois lados do triângulo. Prove que o incentro e o circuncentro do triângulo e o ponto O são colineares.*

Resolução

O nome do ponto dado não é O por acaso: sejam A, B e C os centros dos três círculos congruentes e $A'B'C'$ o triângulo cujos lados tangenciam esses três círculos. Note que os raios dos círculos congruentes são $OA = OB = OC$, isto é, O é circuncentro de ABC. Além disso, das tangências dos círculos com os lados temos que AA', BB' e CC' são as bissetrizes do triângulo $A'B'C'$ e se interceptam no incentro I do triângulo.



As distâncias de A e B a $A'B'$ são iguais aos raios dos círculos congruentes e são, portanto, iguais. Então AB e $A'B'$ são paralelos. Analogamente, AC é paralelo a $A'C'$ e BC é paralelo a $B'C'$, de modo que os triângulos ABC e $A'B'C'$ são homotéticos. O centro de homotetia é I. Essa homotetia leva O ao circuncentro O' de $A'B'C'$. Assim, I, O e O' são colineares. ∎

Note que a dificuldade do problema foi *achar* a homotetia; depois bastou aplicar a propriedade de colinearidade.

Exercícios

01. (Problema 2, IMO 1982) Seja $A_1A_2A_3$ um triângulo escaleno com lados a_1, a_2 e a_3 (a_i é o lado oposto a A_i). Seja M_i o ponto médio do lado a_i e T_i o ponto onde o incírculo do triângulo toca o lado a_i, para $i = 1, 2, 3$. Seja S_i o simétrico de T_i em relação à bissetriz interna do ângulo A_i. Prove que as retas M_1S_1, M_2S_2 e M_3S_3 são concorrentes.

02. (Problema 2, IMO 1983) Seja A um dos dois pontos de interseção dos círculos C_1 e C_2, de centros O_1 e O_2, respectivamente. Uma das tangentes comuns aos círculos toca C_1 em P_1 e C_2 em P_2, e a outra toca C_1 em Q_1 e C_2 em Q_2. Seja M_1 o ponto médio de P_1Q_1 e M_2 o ponto médio de P_2Q_2. Prove que $\angle O_1AO_2 = \angle M_1AM_2$.

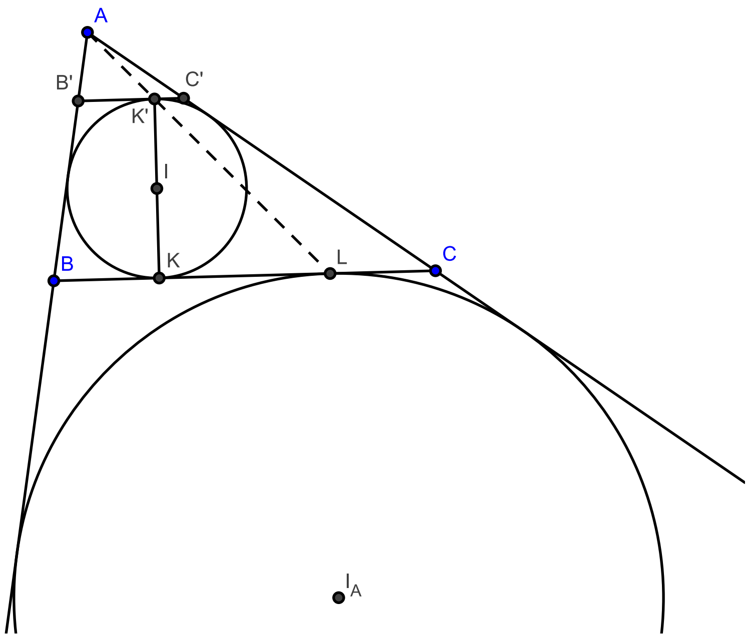
03. (Prova de Seleção 2008, Banco da IMO 2007) As diagonais do trapézio $ABCD$ cortam-se no ponto P. O ponto Q está na região determinada pelas retas paralelas BC e AD tal que $\angle AQD = \angle CQB$ e a reta CD corta o segmento PQ. Prove que $\angle BQP = \angle DAQ$.

3. O Fenômeno Homotético Circular

Algumas aplicações de certos teoremas são tão conhecidos quanto os próprios. Para homotetias, é o caso com o fenômeno homotético circular, que mostra uma colinearidade bastante interessante envolvendo incírculo e ex-incírculo.

Fenômeno Homotético Circular. *Seja ABC um triângulo e sejam K e L os pontos de tangência do incírculo e ex-incírculo relativo a A em BC. Então A, L e o ponto K' diametralmente oposto a K no incírculo são colineares.*

Demonstração



Basta traçar a reta $B'C'$ paralela a BC que tangencia o incírculo de ABC em K'. Então os triângulos ABC e $AB'C'$ são homotéticos com centro em A. Para terminar, o incírculo de ABC é ex-incírculo de $AB'C'$, de modo que os pontos K' e L são correspondentes na homotetia e estão, portanto, alinhados com A. ∎

Vale a pena lembrar também que, na figura acima, $BK = LC$.

Exercícios

04. (Problema 4, IMO 1992) No plano, considere uma circunferência C, uma reta L tangente à circunferência e M um ponto da reta L. Encontre o lugar geométrico dos pontos P com a seguinte propriedade: existem dois pontos Q, R da reta L tais que M é o ponto médio de QR e C é a circunferência inscrita no triângulo PQR.

4. Composição de homotetias

A principal inovação na IMO 2008 no problema 6 foi explorar o seguinte fato:

Composição de homotetias. *Se σ_1 é uma homotetia de centro O_1 e σ_2 é uma homotetia de centro O_2 então a composição de homotetias $\sigma = \sigma_2 \circ \sigma_1$ é uma homotetia de centro O, e O_1, O_2 e O estão alinhados. A única exceção é quando a composição σ é uma translação.*

Demonstração

Utilizaremos vetores para provar esse fato.

Seja P um ponto qualquer e sejam k_1 e k_2 as razões de homotetia de σ_1 e σ_2, respectivamente. Então $\sigma_1(P) = O_1 + k_1 \cdot (P - O_1)$ e, portanto,

$$\begin{aligned}\sigma(P) &= \sigma_2 \circ \sigma_1(P) = \sigma_2(\sigma_1(P)) = O_2 + k_2 \cdot (\sigma_1(P) - O_2) \\ &= O_2 + k_2 \cdot (O_1 + k_1 \cdot (P - O_1) - O_2) \\ &= k_2(1 - k_1) \cdot O_1 + (1 - k_2) \cdot O_2 + k_1k_2 \cdot P \qquad (*)\end{aligned}$$

Primeiro, se σ é uma homotetia, então sua razão é k_1k_2 (as figuras são "multiplicadas" por k_1 e depois por k_2; ou seja, são "multiplicadas" por k_1k_2). Assim, para provarmos que σ é uma homotetia, temos que provar que existe um ponto O tal que

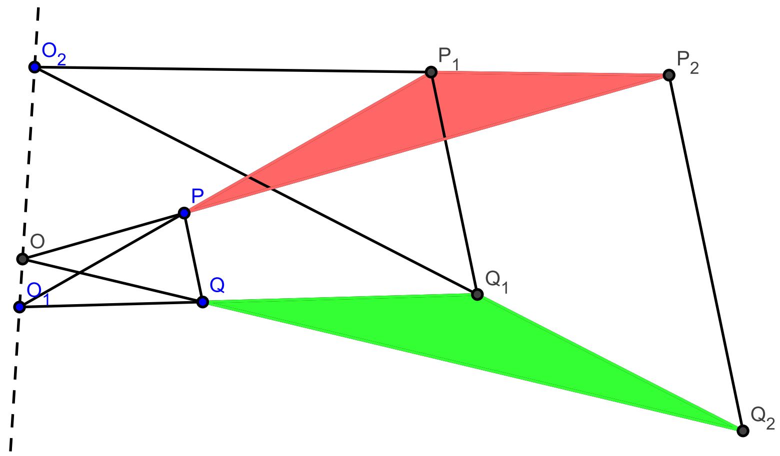
$$\sigma(P) = O + k_1k_2 \cdot (P - O) = (1 - k_1k_2) \cdot O + k_1k_2 \cdot P \qquad (**)$$

Comparando os coeficientes em $(*)$ e $(**)$ concluímos que $(1 - k_1k_2)O = k_2(1 - k_1) \cdot O_1 + (1 - k_2) \cdot O_2$. Se $k_1k_2 = 1$, σ é uma translação (verifique!). Caso contrário, $O = \frac{k_2(1-k_1)\cdot O_1 + (1-k_2)\cdot O_2}{1-k_1k_2}$ e, como $k_2(1-k_1) + (1 - k_2) = k_2 - k_1k_2 + 1 - k_2 = 1 - k_1k_2$, O é uma média ponderada de O_1 e O_2. Em outras palavras, O pertence à reta O_1O_2. ∎

Os partidários da geometria sintética devem estar sentindo falta de uma demonstração sintética. Vamos provar a parte da colinearidade sinteticamente.

Demonstração sintética da colinearidade

Considere dois pontos P e Q e seus transformados $P_1 = \sigma_1(P)$, $Q_1 = \sigma_1(Q)$, $P_2 = \sigma_2(P_1) = \sigma(P)$ e $Q_2 = \sigma_2(Q_1) = \sigma(Q)$.



Note que, das homotetias, PQ, P_1Q_1 e P_2Q_2 são paralelos. Em termos projetivos, eles são concorrentes em um ponto do infinito. Isto quer dizer que os triângulos PP_1P_2 e QQ_1Q_2 são perspectivos e podemos aplicar o teorema de Desargues: as interseções entre lados correspondentes, $PP_1 \cap QQ_1 = \{O_1\}$, $P_1P_2 \cap Q_1Q_2 = \{O_2\}$ e $PP_2 \cap QQ_2 = \{O\}$ são colineares. ∎

4.1. Detalhe técnico

Geralmente, trabalhamos com homotetias sinteticamente, e aparecem homotetias diretas e inversas. Homotetias inversas "multiplicam" figuras por fatores negativos, de modo que a composição de duas homotetias do mesmo tipo é direta e a composição de duas homotetias de tipos diferentes é inversa. Para facilitar, a homotetia inversa faz o papel do sinal de menos e a homotetia direta, do sinal de mais. Na composição de homotetias, seguimos a regra dos sinais da multiplicação.

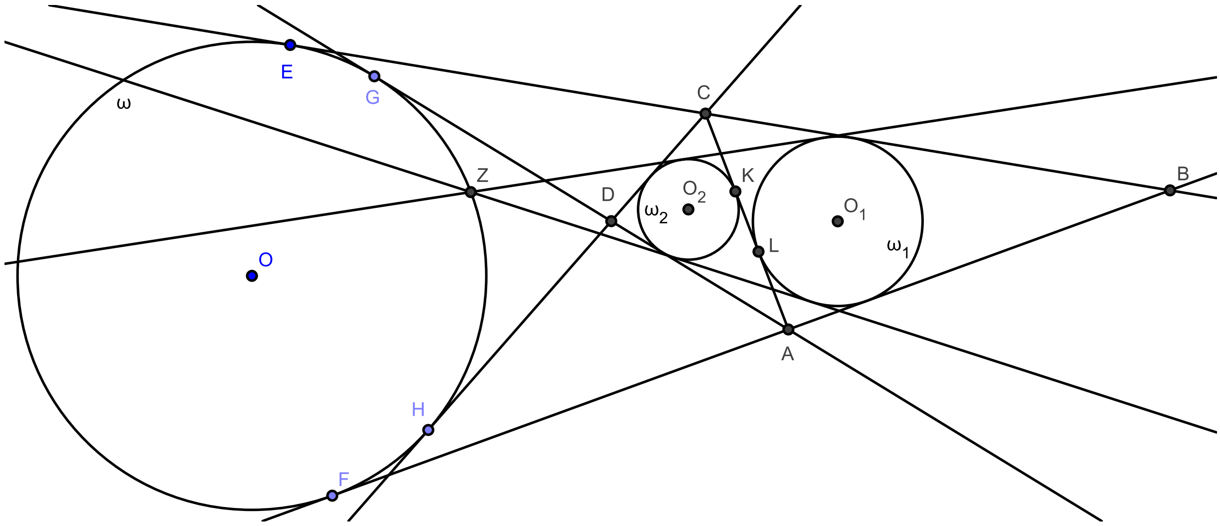
Agora estamos prontos para resolver o problema 6 da IMO 2008. Vamos reenunciar o problema e resolvê-lo.

Exemplo 4.1.

Problema 6, IMO 2008. *Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo cujos lados BA e BC têm comprimentos diferentes. Sejam ω_1 e ω_2 as circunferências inscritas nos triângulos ABC e ADC, respectivamente. Suponhamos que existe uma circunferência ω tangente à reta BA de forma que A está entre B e o ponto de tangência, tangente à reta BC de forma que C está entre B e o ponto de tangência, e que também seja tangente às retas AD e CD. Prove que as tangentes comuns exteriores a ω_1 e ω_2 se intersectam sobre ω.*

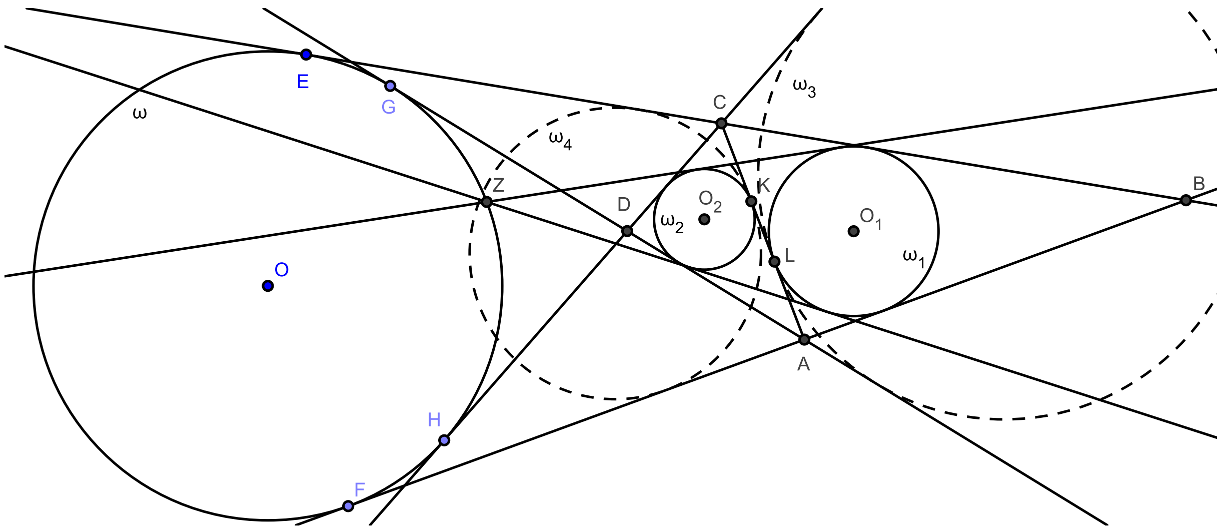
Resolução

Vamos começar trabalhando com segmentos tangentes.



Temos $BE = BF$, $AF = AG$, $CE = CH$ e $DG = DH$. Então $AB = BF - AF = BE - AG = BC + CE - (AD + DG) = BC + CH - AD - DH = BC - AD + (CH - DH) = BC - AD + CD \implies AB + AD = BC + CD$. Note que esse fato depende somente de ω ser tangente aos prolongamentos dos lados do quadrilátero $ABCD$ (guarde esse fato, ele pode ser útil em outros problemas!). Isso implica $\frac{AC+CD-AD}{2} = \frac{AC+AB-BC}{2} \iff CK = AL$.

Essa igualdade é simples, mas abre muitas portas para nós! De fato, ela quer dizer que os ex-incírculos ω_3 e ω_4 relativos a AC dos triângulos ABC e ADC tocam AC em K e L, respectivamente. Isso nos dá muitas, mas muitas homotetias, e pelo menos duas oportunidades de utilizar o fenômeno homotético circular! Desenhemos as circunferências:

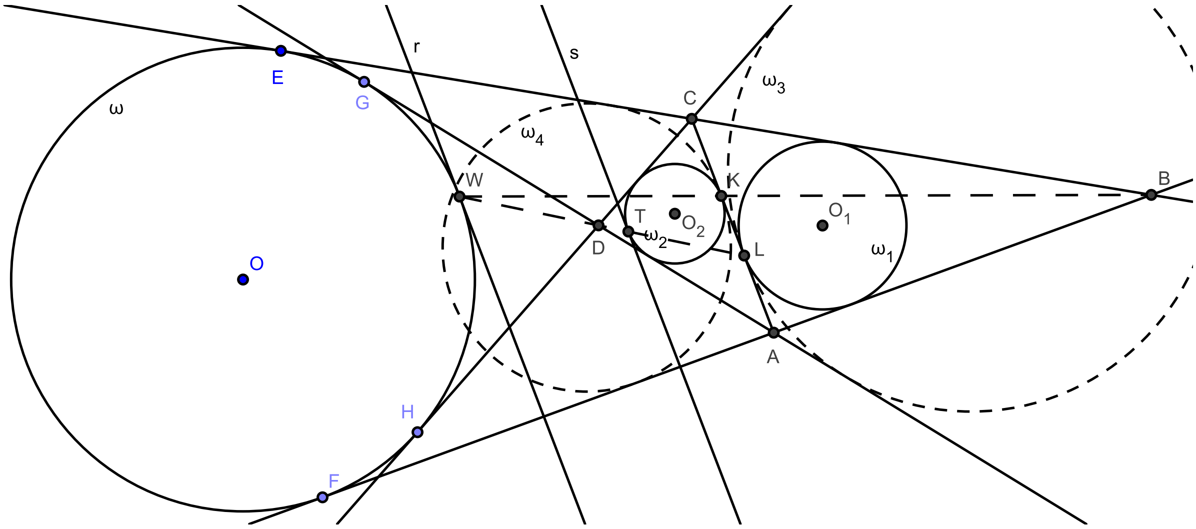


Vamos compor homotetias para descobrir colinearidades, utilizando ω_3 e ω_4 como "intermediários"!

- $\omega_2 \overset{\sigma_{24}}{\to} \omega_4 \overset{\sigma_{41}}{\to} \omega_1$ e $\omega_2 \overset{\sigma_{21}}{\to} \sigma_1$. O centro K da homotetia (direta) σ_{24}, o centro B da homotetia (direta) σ_{41} e o centro Z da homotetia (direta) σ_{21} estão alinhados. Isso quer dizer que Z pertence à reta BK.
- $\omega_2 \overset{\sigma_{23}}{\to} \omega_3 \overset{\sigma_{31}}{\to} \omega_1$ e $\omega_2 \overset{\sigma_{21}}{\to} \sigma_1$. O centro D da homotetia (direta) σ_{23}, o centro L da homotetia (direta) σ_{31} e o centro Z da homotetia (direta) σ_{21} estão alinhados. Isso quer dizer que Z pertence à reta DL.

Com isso, concluímos que Z é a interseção de BK e DL.

Note que até agora não envolvemos o círculo ω nas homotetias. Agora é a hora, mas vamos provar colinearidades de outra forma. Seja W a interseção de BK e ω. Provaremos que $W = Z$, resolvendo o problema.



Primeiro, note que a homotetia direta σ_4 que leva ω_4 a ω tem centro B e, portanto, leva K a W. Mais ainda: como AC é tangente a ω_4 em K, a reta r paralela a AC que passa por W é tangente a ω, pois a reta AC é levada a r por σ_4.

Agora, considere a homotetia inversa σ_2 que leva ω a ω_2. Essa homotetia tem centro em D, leva W a T e r a s, que é paralela a r e AC e é tangente a ω_2. Assim, D, W e T estão alinhados, ou seja, W pertence à reta DT.

Falta ainda identificar melhor o ponto T. Na verdade, ele é bem conhecido: como s e AC são paralelos, T e K são diametralmente opostos. Podemos, assim, aplicar o fenômeno homotético circular: D, T e L são colineares e L também pertence à reta DT.

Portanto D, L e W são colineares, de modo que W pertence a DL. Como W pertence, por definição, à reta BK, W é a interseção de BK e DL, e só pode ser igual a Z. ∎

Observação: Note que a condição $AB \neq AC$ é importante para que as retas BK e DL não coincidam.

Exercícios

05. (Banco da IMO 2007) O ponto P pertence ao lado AB do quadrilátero convexo $ABCD$. Seja ω o incírculo do triângulo CPD e I o seu incentro. Suponha que ω é tangente aos incírculos dos triângulos APD e BPC em K e L, respectivamente. As retas AC e BD se encontram em E e as retas AK e BL se encontram em F. Prove que os pontos E, I e F são colineares.

06. (Romênia) Seja ABC um triângulo e ω_a, ω_b, ω_c círculos dentro de ABC tangentes exteriormente duas a duas, tais que ω_a é tangente a AB e AC, ω_b é tangente a AB e BC e ω_c é tangente a AC e BC. Sejam D o ponto de tangência entre ω_b e ω_c, E o ponto de tangência entre ω_a e ω_c e F o ponto de tangência entre ω_a e ω_b. Prove que as retas AD, BE e CF têm um ponto em comum.

07. (Irã) Sejam ω e Ω o incírculo e o circuncírculo do triângulo ABC. ω toca BC, CA e AB em D, E e F respectivamente. Os três círculos ω_a, ω_b e ω_c tangenciam ω em D, E e F, repesctivamente, e Ω em K, L e M, respectivamente.

(a) Prove que DK, EL e FM têm um ponto P em comum.

(b) Prove que o ortocentro do triângulo DEF pertence à reta OP.

08. Seja Γ uma circunferência e A, B e C pontos em seu interior. Construa as seguintes três circunferências: Γ_1 tangente a Γ, AB e AC; Γ_2 tangente a Γ, AB e BC; Γ_3 tangente a Γ, AC e BC. Sendo C_1, C_2 e C_3 os respectivos pontos de tangência de Γ_1, Γ_2, Γ_3 com Γ, prove que AC_1, BC_2 e CC_3 passam por um mesmo ponto.