

Desigualdades

As desigualdades têm mudado um pouco de cara nos últimos anos. O que eram aplicações aparentemente aleatórias das desigualdades conhecidas virou um monte de desigualdades com novas ideias, para os quais aplicações diretas das desigualdades conhecidas não funcionam.

Mas isso não quer dizer que você não precisa dominar essas desigualdades.

1. As conhecidas

Vamos separar as desigualdades de acordo com o caso de igualdade. Não é a nossa intenção demonstrar ou mostrar todas, já que as demonstrações estão bem documentadas em vários outros materiais.

1.1. Uma desigualdade boba que não deve ser desprezada

Todo quadrado é não negativo. Para todo x real,

$$x^2 \geq 0$$

1.2. Desigualdades que “aproximam” pontos

Ou seja, em que o caso de igualdade é quando todos são iguais (ou semelhantes).

Desigualdade das médias. Sendo a_1, a_2, \dots, a_n reais positivos,

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$$

A igualdade ocorre quando $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Desigualdade das médias potenciais. Sendo a_1, a_2, \dots, a_n reais positivos, defina

$$M(\alpha) = \left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \dots + a_n^\alpha}{n} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

Então

$$\alpha < \beta \implies M(\alpha) \leq M(\beta)$$

A igualdade ocorre quando $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Desigualdade de Jensen. Se f é uma função convexa (para quaisquer dois pontos A e B no gráfico da f , o gráfico da f entre A e B está **debaixo** do segmento AB ; caso f seja derivável duas vezes, $f''(x) > 0$ para todo x no domínio da f) está então, sendo $E(y_i)$ a média aritmética dos números y_i ,

$$E(f(x_i)) \geq f(E(x_i))$$

Se f é uma função côncava (para quaisquer dois pontos A e B no gráfico da f , o gráfico da f entre A e B está **acima** do segmento AB ; caso f seja derivável duas vezes, $f''(x) < 0$ para todo x no domínio da f) então

$$E(f(x_i)) \leq f(E(x_i))$$

Todas as desigualdades anteriores funcionam com médias ponderadas.

Desigualdade de Cauchy-Schwarz. Sendo a_1, a_2, \dots, a_n e b_1, b_2, \dots, b_n reais,

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2$$

A igualdade ocorre quando existem constantes k, ℓ reais tais que $\ell a_i = kb_i$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$.

Desigualdade de Cauchy-Schwarz na forma de Engel. Sendo a_1, a_2, \dots, a_n e b_1, b_2, \dots, b_n reais positivos,

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}$$

A igualdade ocorre quando existem constantes k, ℓ reais tais que $\ell a_i = kb_i$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$.

Desigualdade de Hölder. Sendo $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ e c_1, c_2, \dots, c_n reais positivos,

$$(a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3)(b_1^3 + b_2^3 + \dots + b_n^3)(c_1^3 + c_2^3 + \dots + c_n^3) \geq (a_1b_1c_1 + a_2b_2c_2 + \dots + a_nb_nc_n)^3$$

Desigualdade de Muirhead. Se a sequência de reais não negativos (a_1, a_2, \dots, a_n) majora a sequência de reais não negativos (b_1, b_2, \dots, b_n) (ou seja, $a_1 + \dots + a_i \geq b_1 + \dots + b_i$ para $1 \leq i < n$ e $a_1 + \dots + a_n = b_1 + \dots + b_n$) então

$$\sum_{sym} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n} \geq \sum_{sym} x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_n^{b_n}$$

para todos x_1, x_2, \dots, x_n reais positivos, com igualdade quando $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ ou as sequências são iguais.

Desigualdades de Newton e Maclaurin. Seja $d_k = \sigma_k / \binom{n}{k}$, em que σ_k é o k -ésimo polinômio simétrico das variáveis positivas x_1, x_2, \dots, x_n - o termo em x^k de $(x + x_1)(x + x_2) \dots (x + x_n)$. Então

- (Desigualdade de Newton)

$$d_k^2 \geq d_{k-1}d_{k+1} \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, n-1$$

- (Desigualdade de Maclaurin)

$$d_1 \geq d_2^{1/2} \geq d_3^{1/3} \geq \dots \geq d_n^{1/n}$$

1.3. Desigualdades que “afastam” pontos

Nem todas as desigualdades “juntam” pontos. Algumas têm o caso de igualdade nos extremos.

Desigualdade do rearranjo. Sejam $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ e $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$ reais. Então, sendo c_1, c_2, \dots, c_n uma permutação da sequência b_1, b_2, \dots, b_n , os valores máximo e mínimo de

$$a_1c_1 + a_2c_2 + \dots + a_nc_n$$

são respectivamente

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n \quad \text{e} \quad a_1b_n + a_2b_{n-1} + \dots + a_nb_1$$

Os casos de igualdade são um pouco mais complicados, especialmente se há números iguais.

Desigualdade de Chebyshev. Sejam $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ e $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$ reais. Então

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n} \leq \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n}{n}$$

Se as sequências estiverem em ordem invertida, a desigualdade se inverte também. Novamente, como essa desigualdade decorre de rearranjo, os casos de igualdade são complicados. Além disso, essa desigualdade **não é verdadeira** para médias com pesos.

Funções convexas e côncavas. Se $f(x)$ é uma função convexa (côncava) em $[a, b]$ então seu máximo (mínimo) nesse intervalo é $f(a)$ ou $f(b)$; isso também vale para funções de várias variáveis: basta checar os extremos e as fronteiras.

A próxima desigualdade é um meio-termo.

Desigualdade de Schur. Sendo x, y, z reais não negativos e t real positivo,

$$x^t(x-y)(x-z) + y^t(y-x)(y-z) + z^t(z-x)(z-y) \geq 0$$

com igualdade quando $x = y = z$ ou quando dois dos números x, y, z são iguais e o outro número é zero. A desigualdade é válida para todos x, y, z reais se t é um inteiro par. Para $t = 1$ ela equivale a

$$\sum_{sym} x^3 + xyz \geq \sum_{sym} 2x^2y,$$

de modo que ela pode ser muito útil se aliada a Muirhead.

2. Algumas técnicas padrão

2.1. Homogenizar desigualdades

Uma desigualdade é homogênea quando não se altera quando multiplicamos cada variável pelo mesmo número real t . Às vezes, é melhor trabalhar com desigualdades homogêneas (para, por exemplo, aplicarmos Muirhead); caso haja alguma condição sobre as variáveis, podemos substituí-la para obtermos desigualdades homogêneas.

Às vezes, fazemos o caminho inverso, para cair, por exemplo, em uma desigualdade do tipo $\sum f \geq C$.

2.2. Desigualdades simétricas

Uma desigualdade é simétrica quando não se altera ao permutarmos as variáveis. Caso ela se mantenha só se trocarmos duas variáveis, digamos, x e y , ela é simétrica em x e y . No primeiro caso, podemos estabelecer uma ordem entre as variáveis; no segundo, podemos supor, sem perda de generalidade, $x \geq y$.

2.3. Algumas substituições

Vale a pena ficar de olho em possíveis substituições, como trigonométrica ($x = \operatorname{tg} \alpha \implies \frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\alpha$, por exemplo) ou geométricas ($\sqrt{a^2+b^2}$ e Pitágoras, $a = x + y$, $b = y + z$ e $c = z + x$ para a, b, c lados de um triângulo) ou simplesmente que simplificam denominadores chatos ($x = b + c$, $y = c + a$ e $z = a + b$ em $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$, por exemplo).

3. Novas dificuldades e novas técnicas

A razão pela qual as desigualdades foram separadas em duas classes é a seguinte: **é importante saber quando juntar ou separar pontos**. Antigamente, praticamente todas as desigualdades tinham como caso de desigualdade todas as variáveis iguais, envolviam funções convexas, e eram simétricas e homogêneas. Muitas ainda mantêm essa característica, mas outras têm novos desafios.

3.1. Os casos de igualdade são bizarros

Tome, por exemplo, o seguinte problema do banco da IMO 2005:

Exemplo 3.1.

(Banco IMO 2005) Quatro números reais p, q, r, s satisfazem $p + q + r + s = 9$ e $p^2 + q^2 + r^2 + s^2 = 21$. Prove que existe uma permutação (a, b, c, d) de (p, q, r, s) tal que $ab - cd \geq 2$.

Resolução

Primeiro, note que não é possível termos $p = q = r = s$. E a permutação na verdade é uma quimera: basta supor que $p \geq q \geq r \geq s$, porque a melhor permutação é tomar p e q grandes e r e s pequenos.

Mesmo assim, o caso de igualdade parece ser mais próximo de “todos juntos” do que de “todos separados”, porque precisamos aproximar pq de rs . De fato, não é difícil notar que um caso de igualdade é $p = 3$ e $q = r = s = 2$.

Pela quantidade de quadrados que aparecem e pela assimetria, parece interessante dividir os números em dois grupos: p, q e r, s . Começamos observando que

$$pq - rs = \frac{(p+q)^2 - (p^2 + q^2) + (r-s)^2 - (r^2 + s^2)}{2} = \frac{(p+q)^2 + (r-s)^2 - 21}{2}$$

Agora, não parece que há muito o que fazer a não ser abrir $(p+q+r+s)^2$:

$$(p+r+q+s)^2 = p^2 + q^2 + r^2 + s^2 + 2(pq + rs + pr + qs + ps + qr)$$

Como conseguirmos expressões não simétricas? Usando rearranjo! Note que

$$pq + rs \geq pr + qs \geq ps + qr$$

(na primeira desigualdade, considere (p, s) e (q, r) ; na segunda, (p, q) e (r, s)).

Então, substituindo $p+q+r+s$ e $p^2+q^2+r^2+s^2$ e considerando essa desigualdade,

$$9^2 = 21 + 2(pq + rs + pr + qs + ps + qr) \leq 21 + 6(pq + rs) \implies pq + rs \geq 10$$

Quase! Faltou só um sinal! Mas temos

$$pq + rs = \frac{(p+q)^2 - p^2 - q^2 + (r+s)^2 - r^2 - s^2}{2} = \frac{(p+q)^2 + (r+s)^2 - 21}{2}$$

de modo que, sendo $S = p+q$,

$$\frac{S^2 + (9-S)^2 - 21}{2} \geq 10 \iff S^2 - 9S + 20 \geq 0 \iff S \leq 4 \text{ ou } S \geq 5$$

Como $p+q \geq r+s$, $S \geq \frac{9}{2}$, de modo que $p+q \geq 5$.

Logo

$$pq - rs = \frac{(p+q)^2 - (p^2 + q^2) + (r-s)^2 - (r^2 + s^2)}{2} = \frac{(p+q)^2 + (r-s)^2 - 21}{2} \geq \frac{5^2 - 21}{2} = 4$$

■

3.2. Desigualdades do tipo $\sum f(x_i) \geq C$ com funções f nem convexas nem côncavas

Desigualdades que saem direto com Jensen têm diminuído nos últimos tempos (a única dificuldade a mais que aparecia era os pesos que apareciam). Então começaram a aparecer desigualdades com funções f que não são nem côncavas nem convexas em todo o intervalo. Nesse caso, há as seguintes possibilidades para atacar os problemas:

- (1) Estudar a convexidade de f e dividir em casos, de acordo com os intervalos de convexidade;
- (2) Estimar f por retas ou outras curvas (veremos como fazer isso logo)
- (3) Uma combinação dos anteriores.

Exemplo 3.2.

Sejam a, b, c reais positivos, prove que

$$\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2} + \frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2} + \frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2} \geq \frac{3}{5}.$$

Resolução

Como a desigualdade é homogênea, podemos supor, sem perda de generalidade, que $a+b+c=3$ (só para o caso de igualdade ser $a=b=c=1$). A desigualdade então é equivalente a

$$\frac{(3-2a)^2}{(3-a)^2+a^2} + \frac{(3-2b)^2}{(3-b)^2+b^2} + \frac{(3-2c)^2}{(3-c)^2+c^2} \geq \frac{3}{5}.$$

Seja então $f(x) = \frac{(3-2x)^2}{(3-x)^2+x^2}$. Note que $f'(x) = \frac{18(2x-3)}{(2x^2-6x+9)^2}$ e $f''(x) = -\frac{108(2x^2-6x+3)}{(2x^2-6x+9)^3}$. Note que f'' tem duas raízes, $\frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}$, ambas no intervalo $[0, 3]$. Ou seja, f não é nem côncava nem convexa nesse intervalo.

Vamos usar a estratégia de passar reta tangente, então. Vamos tentar encontrar uma desigualdade do tipo

$$f(x) \geq mx + n$$

em que o caso de igualdade é para $x=1$ (que é o caso de igualdade no nosso problema). De cara, temos

$$f(1) = m + n \iff m + n = \frac{1}{5}$$

Mas não basta a reta cruzar f , porque aí o sinal da desigualdade inverte em $x=1$; a reta deve **tangenciar** o gráfico da f em $x=1$. Logo

$$f'(1) = m \iff m = -\frac{18}{25}$$

Logo $n = \frac{23}{25}$. Vamos verificar se $f(x) \geq -\frac{18x-23}{25}$: para isso é só abrir a conta e lembrar que $x=1$ é raiz dupla dessa equação (use isso para checar suas contas!):

$$\begin{aligned} f(x) \geq -\frac{18x-23}{25} &\iff 25(4x^2-12x+9) \geq -(18x-23)(2x^2-6x+9) \\ &\iff 36x^3-54x^2+18 \geq 0 \\ &\iff (x-1)^2(2x+1) \geq 0, \end{aligned}$$

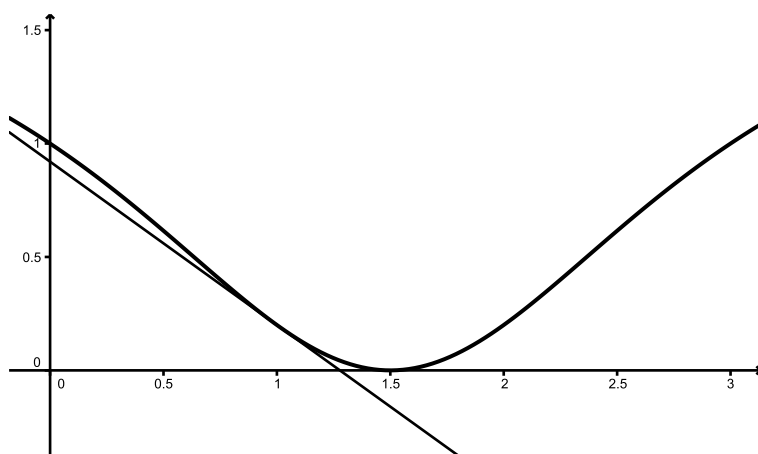
o que é verdade para todo $x \geq 0$.

Logo

$$\begin{aligned} &\frac{(3-2a)^2}{(3-a)^2+a^2} + \frac{(3-2b)^2}{(3-b)^2+b^2} + \frac{(3-2c)^2}{(3-c)^2+c^2} = f(a) + f(b) + f(c) \\ &\geq -\frac{18a-23}{25} - \frac{18b-23}{25} - \frac{18c-23}{25} = \frac{3 \cdot 23 - 18(a+b+c)}{25} = \frac{3}{5}, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

Só para ilustrar, mostramos o gráfico da f e da reta:



Nem sempre uma reta só resolve. Veja o próximo exemplo.

Exemplo 3.3.

Se a, b, c e d são números reais positivos tais que $a + b + c + d = 2$, prove que

$$\frac{a^2}{(a^2 + 1)^2} + \frac{b^2}{(b^2 + 1)^2} + \frac{c^2}{(c^2 + 1)^2} + \frac{d^2}{(d^2 + 1)^2} \leq \frac{16}{25}.$$

Resolução

Seja $f(x) = \frac{x^2}{(x^2+1)^2}$. Note que, sendo $f(x) = \frac{1}{(x+\frac{1}{x})^2} = f(\frac{1}{x})$ e f crescente em $[0, 1]$, podemos supor, sem perda de generalidade, que $a, b, c, d \leq 1$. De fato, se por exemplo $a > 1$ trocamos a por $\frac{1}{a} < a$, e $\frac{1}{a} + b + c + d < 2$, de modo que $f(a) + f(b) + f(c) + f(d) = f(\frac{1}{a}) + f(b) + f(c) + f(d) < f(x) + f(y) + f(z) + f(w)$, em que substituímos a, b, c, d por x, y, z, w tais que $1 \geq x \geq \min(a, \frac{1}{a})$, $1 \geq y \geq \min(b, \frac{1}{b})$, $1 \geq z \geq \min(c, \frac{1}{c})$, $w \geq \min(d, \frac{1}{d})$ e $x + y + z + w = 2$.

Para cada x_0 considere a reta tangente ao gráfico de f em $(x_0, f(x_0))$, ou seja, $g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Vejamos quando $f(x) \leq g(x)$. Notando que $x = x_0$ é raiz dupla de $f(x) - g(x)$, temos

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2} - \frac{x_0^2}{(x_0^2 + 1)^2} - \frac{2x_0(x_0^2 + 1) - x_0^2 \cdot 2 \cdot 2x_0}{(x_0^2 + 1)^3} (x - x_0) \\ &= \frac{(x + x_0)(xx_0 + 1)(x - x_0)(-xx_0 + 1)}{(x^2 + 1)^2(x_0^2 + 1)^2} - \frac{2x_0 - 2x_0^3}{(x_0^2 + 1)^3} (x - x_0) \\ &= \frac{x - x_0}{(x^2 + 1)^2(x_0^2 + 1)^3} ((x + x_0)(xx_0 + 1)(-xx_0 + 1)(x_0^2 + 1) - 2x_0(1 - x_0^2)(x^2 + 1)^2) \\ &= \frac{(x - x_0)^2}{(x^2 + 1)^2(x_0^2 + 1)^3} ((1 - x^2x_0^2)(x_0^2 + 1) + 2x_0(x + x_0)(x_0^2x^2 - x^2 - 2)) \\ &= \frac{(x - x_0)^2}{(x^2 + 1)^2(x_0^2 + 1)^3} (-2x_0(1 - x_0^2)x^3 - x_0^2(3 - x_0^2)x^2 - 4x_0x + 1 - 3x_0^2) \end{aligned}$$

O sinal de $f(x) - g(x)$ é o mesmo que o sinal de

$$h(x) = -2x_0(1 - x_0^2)x^3 - x_0^2(3 - x_0^2)x^2 - 4x_0x + 1 - 3x_0^2$$

Como estamos trabalhando somente com $x_0 \in (0, 1]$, todos os coeficientes de h , com a possível exceção de $1 - 3x_0^2$, são negativos.

O caso de igualdade no problema é $a = b = c = d = \frac{1}{2}$, então $x_0 = \frac{1}{2}$ é uma escolha natural. Nesse caso, $g(x) = \frac{4}{25} + \frac{48}{125} \left(x - \frac{1}{2}\right)$ e $h(x) = -\frac{3}{4}x^3 - \frac{11}{16}x^2 - 2x + \frac{1}{4}$. Note que $h(x) \leq 0$ para $x \geq \frac{1}{8}$. Então, se $a, b, c, d \geq \frac{1}{8}$ então

$$f(a) + f(b) + f(c) + f(d) \leq g(a) + g(b) + g(c) + g(d) = 4 \cdot \frac{4}{25} + \frac{48}{25} \left(a + b + c + d - 4 \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{16}{25}$$

Resta então os casos em que um ou mais números são menores do que $\frac{1}{8}$. Note que, como $a + b + c + d = 2$ e $a, b, c, d \leq 1$ então no máximo dois números são menores do que $\frac{1}{8}$.

Se dois números são menores do que $\frac{1}{8}$, como f é crescente então

$$f(a) + f(b) + f(c) + f(d) \leq 2f\left(\frac{1}{8}\right) + 2f(1) = 2 \cdot \frac{64}{65^2} + 2 \cdot \frac{1}{4} < 2 \cdot \frac{1}{64} + \frac{1}{2} < \frac{16}{25}$$

Se exatamente um número é menor do que $\frac{1}{8}$, digamos a , então tomamos $x_0 = \frac{2}{3}$. Nesse caso, o termo independente de $h(x)$ é $1 - 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 < 0$, o que quer dizer que $h(x) < 0$ para todo $x \in [0, 1]$. Sendo $g(x) = \frac{36}{169} + \frac{540}{13^3} \left(x - \frac{1}{8}\right)$,

$$f(a) + f(b) + f(c) + f(d) \leq f(a) + 3 \cdot \frac{36}{169} + \frac{540}{13^3} \left(b + c + d - 3 \cdot \frac{2}{3}\right) = f(a) + \frac{108}{169} - \frac{540}{13^3} a$$

Sendo $f''(x) = \frac{2(3x^4 - 8x^2 + 1)}{(1+x^2)^4} > 0$ para $0 < x \leq \frac{1}{8}$, $f'(x)$ é crescente nesse intervalo, de modo que $f'(a) \leq f'\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{2 \cdot \frac{1}{8} \left(1 - \left(\frac{1}{8}\right)^2\right)}{\left(1 + \left(\frac{1}{8}\right)^2\right)^3} = \frac{63 \cdot 16 \cdot 64}{5^3 \cdot 13^3} = \frac{12 \cdot 21 \cdot 4 \cdot 64}{125 \cdot 13^3} < \frac{2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 64}{13^3} = \frac{537,6}{13^3} < \frac{540}{13^3}$. Logo o lado direito da última desigualdade é crescente em a , de modo que

$$f(a) + f(b) + f(c) + f(d) \leq f\left(\frac{1}{8}\right) + \frac{108}{169} - \frac{540}{13^3} \cdot \frac{1}{8} = \frac{64}{65^2} + \frac{108}{169} - \frac{135}{2 \cdot 13^3} < \frac{1}{64} + \frac{108 \cdot 26 - 135}{2 \cdot 2197} = \frac{1}{64} + \frac{11 \cdot 3^5}{2 \cdot 2197} < \frac{16}{25}$$

A última desigualdade pode ser verificada notando que $\frac{16}{25} - \frac{1}{16} = \frac{999}{1600}$ e

$$\frac{11 \cdot 3^5}{2 \cdot 2197} < \frac{999}{1600} \iff \frac{11 \cdot 3^2}{2197} < \frac{37}{800} \iff 99 \cdot 800 < 37 \cdot 2197,$$

que é verdadeiro pois $37 \cdot 2197 = 81289 > 80000 > 800 \cdot 99$.

3.3. Desigualdades que parecem as conhecidas, mas invertidas

Como seria Cauchy-Schwarz “ao contrário”?

Exemplo 3.4.

Sejam a_1, a_2, \dots, a_n e b_1, b_2, \dots, b_n reais positivos, e sejam m e M o mínimo e o máximo de $\frac{a_i}{b_i}$, $1 \leq i \leq n$. Prove que

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \leq \frac{(M + m)^2}{4Mm} (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2$$

Resolução

Como atacar um problema que parece “ao contrário”? Pensando também ao contrário: no lugar de pensar em desigualdades que juntam pontos, vamos separar: primeiro, note que

$$\left(\frac{a_i}{b_i} - m\right) \left(M - \frac{a_i}{b_i}\right) \geq 0 \iff (M + m)a_i b_i \geq a_i^2 + M m b_i^2$$

(quando ocorre a igualdade?)

Somando as desigualdades para $i = 1, 2, \dots, n$ obtemos

$$(M + m)(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n) \geq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) + M m (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$$

Aplicando médias,

$$(M + m)(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n) \geq 2\sqrt{M m (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)}$$

e é só elevar ao quadrado. O caso de igualdade fica a seu cargo, mas note que as razões $\frac{a_i}{b_i}$ vão ser iguais a m ou M . ■

Outra maneira de resolver problemas desse tipo é trabalhar com convexidade: funções convexas têm máximos em extremos.

Exemplo 3.5.

Sejam a_1, a_2, \dots, a_n reais não negativos. Prove que

$$\frac{m}{2} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} - \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{(n-1)M}{2},$$

onde $m = \min_{1 \leq i < j \leq n} \{(\sqrt{a_i} - \sqrt{a_j})^2\}$ e $M = \max_{1 \leq i < j \leq n} \{(\sqrt{a_i} - \sqrt{a_j})^2\}$.

Resolução

A primeira desigualdade é bem simples, na verdade: é só colocar o foco nos $(\sqrt{a_i} - \sqrt{a_j})^2$: cada um deles é maior ou igual a m , e é igual a $a_i + a_j - 2\sqrt{a_i a_j}$. Somando ciclicamente para $(i, j) = (i, i+1)$, sendo $a_{n+1} = a_1$, obtemos

$$\begin{aligned} & 2(a_1 + a_2 + \dots + a_n) - 2(\sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{a_2 a_3} + \dots + \sqrt{a_n a_1}) \geq nm \\ \iff & \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} - \frac{\sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{a_2 a_3} + \dots + \sqrt{a_n a_1}}{n} \geq \frac{m}{2} \end{aligned}$$

Agora é só aplicar médias na segunda fração:

$$\frac{\sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{a_2 a_3} + \dots + \sqrt{a_n a_1}}{n} \geq \sqrt[n]{\sqrt{a_1 a_2} \cdot \sqrt{a_2 a_3} \dots \sqrt{a_n a_1}} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

e somar as desigualdades. Note que se $m > 0$ e $n > 2$ a desigualdade é estrita, pois os dois casos de igualdade não podem ocorrer.

O outro lado é mais interessante, porque é “ao contrário”. Nesse caso, vamos usar convexidade. Para não ter que lidar com raízes, seja $a_i = x_i^n$, de modo que a expressão agora é

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{x_1^n + x_2^n + \dots + x_n^n}{n} - x_1 x_2 \dots x_n$$

Suponha, sem perda de generalidade, $a^2 = x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n = b^2$. Então $M = (\sqrt{a_n} - \sqrt{a_1})^2 = (a^n - b^n)^2$. Agora, f é convexa (o produto some após duas derivadas e os outros coeficientes continuam não negativos após derivar), de modo que assume valor máximo nos extremos. Assim, alguns x_i s, digamos, k são iguais a a^2 e os outros $n - k$, iguais a b^2 . A expressão para esses valores é

$$f(\underbrace{a^2, a^2, \dots, a^2}_k, \underbrace{b^2, b^2, \dots, b^2}_{n-k}) = \frac{ka^{2n} + (n-k)b^{2n}}{n} - a^{2k}b^{2n-2k}$$

Agora, devemos provar que

$$\begin{aligned} \frac{ka^{2n} + (n-k)b^{2n}}{n} - a^{2k}b^{2n-2k} &\leq \frac{(n-1)(a^n - b^n)^2}{2} \\ \iff 2ka^{2n} + 2(n-k)b^{2n} - 2na^{2k}b^{2n-2k} &\leq n(n-1)(a^n - b^n)^2 \\ \iff 2n(n-1)a^n b^n &\leq (n(n-1) - 2k)a^{2n} + (n(n-1) - 2(n-k))b^{2n} + 2na^{2k}b^{2n-2k}, \end{aligned}$$

que sai direto por médias (com os pesos certos, que tenho certeza que você vai saber encontrar). Aliás, o valor de k que maximiza f depende de a e b . Novamente, se $M > 0$ a desigualdade também é estrita. ■

3.4. Desigualdades com n variáveis

Muitas desigualdades têm n variáveis e, pior ainda, não são nem simétricas. Muitas vezes, a ideia é tentar estimar com uma telescópica ou qualquer outra soma fácil de calcular.

Exemplo 3.6.

(Banco IMO 2001) Sejam x_1, x_2, \dots, x_n reais. Prove que

$$\frac{x_1}{1+x_1^2} + \frac{x_2}{1+x_1^2+x_2^2} + \dots + \frac{x_n}{1+x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2} < \sqrt{n}.$$

Resolução

Primeiro, Cauchy (ou médias potenciais, ou quadrática-aritmética...) para aparecer quadrados:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{x_1}{1+x_1^2} + \frac{x_2}{1+x_1^2+x_2^2} + \dots + \frac{x_n}{1+x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2} \right)^2 \\ &\leq n \left(\frac{x_1^2}{(1+x_1^2)^2} + \frac{x_2^2}{(1+x_1^2+x_2^2)^2} + \dots + \frac{x_n^2}{(1+x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2)^2} \right) \end{aligned}$$

E agora, telescopamos (escolha um x_{n+1} qualquer):

$$\begin{aligned} &\frac{x_1^2}{(1+x_1^2)^2} + \frac{x_2^2}{(1+x_1^2+x_2^2)^2} + \dots + \frac{x_n^2}{(1+x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2)^2} \\ &< \frac{x_1^2}{(1+x_1^2)(1+x_1^2+x_2^2)} + \frac{x_2^2}{(1+x_1^2+x_2^2)(1+x_1^2+x_2^2+x_3^2)} + \dots + \frac{x_n^2}{(1+x_1^2+\dots+x_n^2)(1+x_1^2+\dots+x_{n+1}^2)} \\ &= \left(\frac{1}{1+x_1^2} - \frac{1}{1+x_1^2+x_2^2} \right) + \left(\frac{1}{1+x_1^2+x_2^2} - \frac{1}{1+x_1^2+x_2^2+x_3^2} \right) + \dots + \left(\frac{1}{1+x_1^2+\dots+x_n^2} - \frac{1}{1+x_1^2+\dots+x_{n+1}^2} \right) \\ &= \frac{1}{1+x_1^2} - \frac{1}{1+x_1^2+\dots+x_{n+1}^2} < 1, \end{aligned}$$

e é só substituir na original e tirar a raiz. ■

3.5. Desigualdades não são mais simétricas

Já vimos algumas desigualdades que não são simétricas, mas vale a pena ver algumas desigualdades cíclicas com quatro variáveis a, b, c, d . Nessas desigualdades, você pode:

- Escolher qualquer uma das variáveis para ser a maior;
- Verificar se é possível supor, sem perda de generalidade, $a \geq c$ e $b \geq d$ (nesse caso, é claro, se você usou o item anterior, a ou b deve ser o maior);
- Utilizar a fatoração $ab + bc + cd + da = (a + c)(b + d)$.

Exemplo 3.7.

Sejam a, b, c, d reais positivos. Prove que

$$a \cdot \frac{a+b}{b+c} + b \cdot \frac{b+c}{c+d} + c \cdot \frac{c+d}{d+a} + d \cdot \frac{d+a}{a+b} \geq a+b+c+d$$

Resolução

Passando a, b, c, d para o primeiro membro, obtemos

$$a \cdot \frac{a-c}{b+c} + b \cdot \frac{b-d}{c+d} + c \cdot \frac{c-a}{d+a} + d \cdot \frac{d-b}{a+b} \geq 0$$

Aqui, infelizmente não dá para supor que $a \geq c$ e $b \geq d$ ao mesmo tempo (mas dá para supor uma delas: é só trocar a por c e b por d ao mesmo tempo). Vamos esperar para ver se vamos precisar fazer alguma suposição do tipo. Mas dá para fatorar $a - c$ e $b - d$:

$$a \cdot \frac{a-c}{b+c} + b \cdot \frac{b-d}{c+d} + c \cdot \frac{c-a}{d+a} + d \cdot \frac{d-b}{a+b} = \frac{(a-c)(a^2 + ad - bc - c^2)}{(b+c)(d+a)} + \frac{(b-d)(ab + b^2 - cd - d^2)}{(c+d)(a+b)}$$

O $a^2 - c^2$ e o $b^2 - d^2$ sugerem que dá para fatorar um pouco mais; mas e $ad - bc$ e $ab - cd$? Para isso, usamos o truque que você já deve ter usado em teoria dos números: $ad - bc = b(a - c) - a(b - d) = d(a - c) - c(b - d)$ e $ab - cd = b(a - c) + c(b - d) = a(b - d) + d(a - c)$:

$$\begin{aligned} & \frac{(a-c)(a^2 + ad - bc - c^2)}{(b+c)(d+a)} + \frac{(b-d)(ab + b^2 - cd - d^2)}{(c+d)(a+b)} \\ &= \frac{(a-c)^2(a+c+d)}{(b+c)(d+a)} + \frac{(b-d)^2(b+d+a)}{(c+d)(a+b)} + \frac{(b-d)(a-c)d}{(c+d)(a+b)} - \frac{(a-c)(b-d)c}{(b+c)(d+a)} \end{aligned}$$

Vamos provar algo um pouco mais forte: provaremos que

$$\frac{(a-c)^2(a+c+d)}{(b+c)(d+a)} + \frac{(b-d)^2(b+d+a)}{(c+d)(a+b)} \geq |(a-c)(b-d)| \left(\frac{d}{(c+d)(a+b)} + \frac{c}{(b+c)(d+a)} \right)$$

Utilizando médias, temos

$$\frac{(a-c)^2(a+c+d)}{(b+c)(d+a)} + \frac{(b-d)^2(b+d+a)}{(c+d)(a+b)} \geq 2|(a-c)(b-d)| \sqrt{\frac{(a+c+d)(b+d+a)}{(b+c)(d+a)(c+d)(a+b)}}$$

E agora vemos que a vitória está próxima: a raiz quadrada parece ser maior do que os dois termos que queremos que sejam menores! De fato,

$$\sqrt{\frac{(a+c+d)(b+d+a)}{(b+c)(d+a)(c+d)(a+b)}} \geq \frac{d}{(c+d)(a+b)} \iff (a+c+d)(b+d+a)(c+d)(a+b) \geq d^2(b+c)(d+a)$$

e

$$\sqrt{\frac{(a+c+d)(b+d+a)}{(b+c)(d+a)(c+d)(a+b)}} \geq \frac{c}{(b+c)(d+a)} \iff (a+c+d)(b+d+a)(b+c)(d+a) \geq c^2(c+d)(a+b)$$

Agora, vale a pena supormos sem perda de generalidade que a é o maior de todos. Aí a primeira desigualdade é verdadeira porque $a+c+d > a+d$, $b+d+a > b+a \geq b+c$, $c+d > d$ e $a+b > a \geq d$ e a segunda é verdadeira porque $a+c+d > c+d$, $b+d+a > a+b$, $b+c > c$ e $d+a > a \geq c$. Note que as desigualdades são estritas a não ser que $a=c$ e $b=d$, que é o caso de igualdade. ■

Outra dica que funciona para qualquer desigualdade cíclica: se um produto $x_1x_2 \dots x_n$ é igual a 1, pode valer a pena substituir $x_1 = \frac{a_1}{a_2}$, $x_2 = \frac{a_2}{a_3}$, ..., $x_n = \frac{a_n}{a_1}$, ou $x_1 = \frac{a_2}{a_1}$, $x_2 = \frac{a_3}{a_2}$, ..., $x_n = \frac{a_1}{a_n}$ (as duas substituições são diferentes).

Exemplo 3.8.

(Rússia) Sejam x_1, x_2, \dots, x_n reais positivos, $n > 3$, tais que $x_1x_2 \dots x_n = 1$. Prove que

$$\frac{1}{1+x_1+x_1x_2} + \frac{1}{1+x_2+x_2x_3} + \frac{1}{1+x_3+x_3x_4} + \dots + \frac{1}{1+x_{n-1}+x_{n-1}x_n} + \frac{1}{1+x_n+x_nx_1} > 1$$

Resolução

Sejam $x_1 = \frac{a_2}{a_1}$, $x_2 = \frac{a_3}{a_2}$, ..., $x_n = \frac{a_1}{a_n}$. Então o termo típico do somatório é

$$\frac{1}{1+x_i+x_{i+1}} = \frac{1}{1+\frac{a_{i+1}}{a_i} + \frac{a_{i+1}}{a_i} \cdot \frac{a_{i+2}}{a_{i+1}}} = \frac{a_i}{a_i+a_{i+1}+a_{i+2}}$$

(sendo os índices tomados módulo n ; tente fazer a outra substituição para ver o que acontece)

Aí fica fácil terminar: cada termo é maior do que $\frac{a_i}{S}$, sendo $S = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Assim,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1+x_1+x_1x_2} + \frac{1}{1+x_2+x_2x_3} + \frac{1}{1+x_3+x_3x_4} + \dots + \frac{1}{1+x_{n-1}+x_{n-1}x_n} + \frac{1}{1+x_n+x_nx_1} \\ & > \frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{S} = 1 \end{aligned}$$

Exercícios

Os problemas não estão em nenhuma ordem específica, nem em termos de dificuldade nem de técnica.

01. (IMO 2008) (a) Prove que

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geq 1 \quad (*)$$

para todos os números reais x, y, z , diferentes de 1, com $xyz = 1$.

(b) Prove que existe uma infinidade de ternos de números racionais x, y, z , diferentes de 1, com $xyz = 1$, para os quais ocorre a igualdade em (*).

02. (Banco IMO 2006) Sendo a_1, a_2, \dots, a_n reais positivos, prove que

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{a_i a_j}{a_i + a_j} \leq \frac{n}{2(a_1 + a_2 + \dots + a_n)} \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j.$$

03. (Banco IMO 2009) Sejam a, b, c reais positivos tais que $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Prove que

$$\frac{1}{(2a + b + c)^2} + \frac{1}{(a + 2b + c)^2} + \frac{1}{(a + b + 2c)^2} \leq \frac{3}{16}.$$

04. Sendo x, y, z reais positivos, prove que

$$\frac{(2x + y + z)^2}{2x^2 + (y + z)^2} + \frac{(2y + z + x)^2}{2y^2 + (z + x)^2} + \frac{(2z + x + y)^2}{2z^2 + (x + y)^2} \leq 8.$$

05. (Banco IMO 2004) Sejam a, b, c reais positivos tais que $ab + bc + ca = 1$. Prove que

$$\sqrt[3]{\frac{1}{a} + 6b} + \sqrt[3]{\frac{1}{b} + 6c} + \sqrt[3]{\frac{1}{c} + 6a} \leq \frac{1}{abc}.$$

06. (IMO 2004) Seja $n \geq 3$ um inteiro. Sejam t_1, t_2, \dots, t_n números reais positivos tais que

$$n^2 + 1 > (t_1 + t_2 + \dots + t_n) \left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \dots + \frac{1}{t_n} \right).$$

Prove que t_i, t_j e t_k são medidas dos lados de um triângulo para quaisquer i, j, k com $1 \leq i < j < k \leq n$.

07. (IMO 2005) Sejam x, y, z reais positivos tais que $xyz \geq 1$. Prove que

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{x^2 + y^5 + z^2} + \frac{z^5 - z^2}{x^2 + y^2 + z^5} \geq 0.$$

08. (IMO 2006) Determine o menor real M tal que a desigualdade

$$|ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2)| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

é verdadeira para todos os reais a, b e c .

09. (IMO 2007) Sejam a_1, a_2, \dots, a_n números reais. Para cada i ($1 \leq i \leq n$) definimos

$$d_i = \max\{a_j : 1 \leq j \leq i\} - \min\{a_j : i \leq j \leq n\}$$

e

$$d = \max\{d_i : 1 \leq i \leq n\}.$$

(a) Prove que para quaisquer números reais $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$,

$$\max\{|x_i - a_i| : 1 \leq i \leq n\} \geq \frac{d}{2}. \quad (*)$$

(b) Prove que existem números reais $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ para os quais vale a igualdade em (*).

10. (Banco IMO 2007) Seja n um inteiro positivo e x e y reais positivos tais que $x^n + y^n = 1$. Prove que

$$\left(\sum_{k=1}^n \frac{1 + x^{2k}}{1 + x^{4k}} \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^n \frac{1 + y^{2k}}{1 + y^{4k}} \right) < \frac{1}{(1-x)(1-y)}.$$

11. (OBM 2009) Seja $n > 3$ um inteiro fixado e x_1, x_2, \dots, x_n reais positivos. Encontre, em função de n , todos os possíveis valores reais de

$$\frac{x_1}{x_n + x_1 + x_2} + \frac{x_2}{x_1 + x_2 + x_3} + \frac{x_3}{x_2 + x_3 + x_4} + \dots + \frac{x_{n-1}}{x_{n-2} + x_{n-1} + x_n} + \frac{x_n}{x_{n-1} + x_n + x_1}$$

12. (CGMO 2010) Sejam x_1, x_2, \dots, x_n reais tais que $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$. Prove que

$$\sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{\sum_{i=1}^n i x_i^2}\right)^2 \cdot \frac{x_k^2}{k} \leq \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 \sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{k}.$$

Quando ocorre a igualdade?

13. (Banco IMO 2008) Sejam a, b, c, d reais positivos tais que $abcd = 1$ e $a + b + c + d > \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a}$. Prove que

$$a + b + c + d < \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{d}{c} + \frac{a}{d}.$$

14. (OBM 2008) Sejam x, y, z reais tais que $x + y + z = xy + yz + zx$. Encontre o valor mínimo de

$$\frac{x}{x^2 + 1} + \frac{y}{y^2 + 1} + \frac{z}{z^2 + 1}.$$

15. (Banco IMO 2006) Se a, b, c são lados de um triângulo, prove que

$$\frac{\sqrt{a+b-c}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c}} + \frac{\sqrt{a-b+c}}{\sqrt{a} - \sqrt{b} + \sqrt{c}} + \frac{\sqrt{-a+b+c}}{-\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}} \leq 3.$$

16. (Banco IMO 2009) Sejam a, b, c reais positivos tais que $ab + bc + ca \leq 3abc$. Prove que

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a + b}} + \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{b + c}} + \sqrt{\frac{c^2 + a^2}{c + a}} + 3 \leq \sqrt{2} (\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a}).$$

17. (Banco IMO 2007) Sejam a_1, a_2, \dots, a_{100} reais não negativos tais que $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{100}^2 = 1$. Prove que

$$a_1^2 a_2 + a_2^2 a_3 + \dots + a_{100}^2 a_1 < \frac{12}{25}.$$

18. (Banco IMO 2008) Prove que, para todos reais positivos a, b, c, d ,

$$\frac{(a-b)(a-c)}{a+b+c} + \frac{(b-c)(b-d)}{b+c+d} + \frac{(c-d)(c-a)}{c+d+a} + \frac{(d-a)(d-b)}{d+a+b} \geq 0.$$

Determine quando ocorre a igualdade.

19. (China 2011) Sejam $a_i, b_i, i = 1, 2, \dots, n$ reais não negativos, $n \geq 4$, tais que $a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n > 0$.

Encontre o máximo de

$$\frac{\sum_{i=1}^n a_i(a_i + b_i)}{\sum_{i=1}^n b_i(a_i + b_i)}$$

20. (China 2011) Sejam a_1, a_2, \dots, a_n reais. Prove que

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 - \sum_{i=1}^n a_i a_{i+1} \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor (M - m)^2$$

sendo $a_{n+1} = a_1, M = \max_{1 \leq i \leq n} a_i, m = \min_{1 \leq i \leq n} a_i$.

21. Sejam a, b, c, d reais tais que $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$. Prove que

$$\sqrt{1-ab} + \sqrt{1-bc} + \sqrt{1-cd} + \sqrt{1-da} \geq 2\sqrt{3}.$$

22. (Romanian Master 2010) Para cada inteiro positivo n , encontre o maior real C_n com a seguinte propriedade: dadas quaisquer n funções $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ definidas no intervalo fechado $0 \leq x \leq 1$ e que assumem valores reais, é possível encontrar números x_1, x_2, \dots, x_n , com $0 \leq x_i \leq 1$, tais que

$$|f_1(x_1) + f_2(x_2) + \dots + f_n(x_n) - x_1 x_2 \dots x_n| \geq C_n.$$

23. (Tuymaada 2002) Sejam a, b, c, d reais positivos tais que $abcd = 1$. Prove que

$$\frac{1+ab}{1+a} + \frac{1+bc}{1+b} + \frac{1+cd}{1+c} + \frac{1+da}{1+d} \geq 4$$

24. (MEMO 2007) Sejam $x \geq y \geq z$ reais tais que $xy + yz + zx = 1$. Prove que $xz < \frac{1}{2}$. É possível melhorar a constante $\frac{1}{2}$?