Sobre o Problema 3 da OBM 2009: Possíveis Generalizações e Conexões

1. O problema original

Problema 3, OBM 2009, Nível 3. *São colocadas* 2009 *pedras em alguns pontos* (x, y) *de coordenadas inteiras do plano cartesiano. Uma operação consiste em escolher um ponto* (a, b) *que tenha quatro ou mais pedras, retirar quatro pedras de* (a, b) *e colocar uma pedra em cada um dos pontos*

$$(a, b-1), \quad (a, b+1), \quad (a-1, b), \quad (a+1, b).$$

Mostre que, após um número finito de operações, cada ponto terá no máximo três pedras. Além disso, prove que a configuração final não depende da ordem das operações.

Vamos dizer que qualquer sequência de operações é um *jogo* e dizemos que um jogo *termina* quando cada ponto tiver pelo menos três pedras (ou seja, não dá para estender o jogo com mais uma operação).

A solução desse problema é do Gugu.

1.1. Demonstração de que o jogo termina

Primeiro, considere os seguintes invariantes: seja P o conjunto das pedras e (x_k, y_k) a coordenada do ponto onde está a pedra k. Então

(a) O centro de massa de P se mantém. De fato, trocamos $4(x+y)$ por $(x-1)+y+x+(y-1)+(x+1)+y+x+(y+1) = 4(x+y)$.

(b) A soma

$$S = \sum_P x_i^2 + y_i^2$$

sempre cresce em quatro unidades após uma operação. De fato, trocamos $4(x^2+y^2)$ por $(x-1)^2+y^2+x^2+(y-1)^2+(x+1)^2+y^2+x^2+(y+1)^2 = 4(x^2+y^2+1)$.

Esse último invariante parece inútil mas não é. Em termos estatísticos, ele essencialmente indica que a variância das coordenadas dos pontos em que estão as pedras sempre aumenta. Ou seja, intuitivamente as pedras ficam mais "espalhadas".

Para terminar o argumento, utilizamos um grafo: os vértices são as pedras e ligamos dois vértices se a distância entre as pedras é no máximo M, sendo M um número grande (maior do que o máximo entre a distância máxima inicial entre duas pedras e 2). O grafo é inicialmente conexo e nunca deixa de ser conexo: considere as quatro pedras em que foi feita uma operação: elas obviamente continuam conectadas entre si e com as pedras que estavam no ponto escolhido para qualquer pedra diferente dessas, uma das quatro pedras ficou mais próxima. É claro que nada muda entre pedras que não se moveram. Então o grafo fica sempre conexo, ou seja, a distância entre duas pedras nunca ultrapassa M.

Isso quer dizer que, como o centro de massa G nunca muda, as pedras ficam numa região limitada por um círculo com centro em G e raio $2009M$ (note que o baricentro deve estar dentro ou no bordo do fecho convexo das pedras). A quantidade de pontos nessa região é finita, logo o conjunto dos valores de S é finito e, portanto, limitada.

Logo, como S sempre aumenta a cada operação, a quantidade de operações é finita, ou seja, o jogo sempre termina.

1.2. Demonstração de que a configuração final não depende da ordem das operações

Suponha, por absurdo, que há duas possíveis configurações finais. Então existe um momento em que há dois possíveis pontos A e B para fazer a operação e o invariante S é máximo. Como após qualquer operação S aumenta, então, qualquer que sejam as próximas jogadas o final está definido unicamente. Assim, escolher A e B levam a finais diferentes e, além disso, a ordem das escolhas dos pontos depois dessa operação não altera o final. Desse modo, pode-se escolher B logo depois de escolher A e vice-versa. Todavia, escolher A e depois B (o que é possível, já que era possível escolher qualquer um dos dois e cada escolha não diminui a quantidade de pedras no outro ponto) é o mesmo que escolher B e depois A, o que levam a finais iguais. Isso é um absurdo e, portanto, o final não depende da ordem em que as operações são feitas.

2. Generalizando para grafos finitos

O problema pode ser facilmente generalizado para grafos: colocamos uma certa quantidade de pedras em cada vértice de um grafo conexo G e os movimentos consistem em escolher um vértice v que tenha pelo menos $d(v)$ (o grau do vértice) pedras, retirar $d(v)$ pedras de v e colocar uma pedra em cada um dos vizinhos.

No que se segue, n é a quantidade de vértices de G, m é a quantidade de arestas de G e N é a quantidade total de pedras.

2.1. Quando o jogo termina?

Provaremos o seguinte

Teorema 2.1.

(i) Se $N > 2m - n$ o jogo não termina.

(ii) Se $m \le N \le 2m - n$ o jogo pode terminar ou não, dependendo de como as pedras estão dispostas inicialmente.

(iii) Se $m < N$ o jogo sempre termina.

Começamos com os seguintes lemas.

Lema 2.1. *Se o jogo não termina então todos os vértices são escolhidos infinitas vezes.*

Demonstração

Como o jogo não termina então um dos vértices é escolhido infinitas vezes. Como a quantidade de pedras é finita, seus vizinhos devem ser escolhidos infinitas vezes também. Continuando o raciocínio, concluímos que todos os vértices são escolhidos infinitas vezes. ∎

Lema 2.2. *Se o jogo termina existe um vértice que não é escolhido.*

Demonstração

Provaremos que, uma vez que todos os vértices já foram escolhidos pelo menos uma vez o jogo não termina. Em qualquer momento do jogo, seja v o vértice que não foi escolhido há mais tempo. Então todos os outros vértices já foram escolhidos (se não, o vértice que não foi escolhido estaria há mais tempo sem ter sido escolhido). isso quer dizer que todos os vizinhos de v foram escolhidos e, portanto, v recebeu pelo menos $d(v)$ pedras e pode, então, ser escolhido. ∎

Vamos agora à demonstração do teorema.

Demonstração do teorema.

(i) Sendo V o conjunto dos vértices, como $N > 2m - n = \sum_{v \in V} d(v) - n = \sum_{v \in V}(d(v) - 1)$, pelo princípio da casa dos pombos então em todo momento do jogo existe um vértice v com pelo menos $d(v)$ pedras e, portanto, o jogo não termina.

(ii) Para $N \le 2m - n$, em cada vértice v coloque no máximo $d(v) - 1$ pedras; nessa situação o jogo termina imediatamente (na verdade, nem começa!).

Para $N \ge m$, basta mostrar que existe uma configuração para $N = m$ que não termina. Oriente as arestas de G de modo que não haja ciclos orientados. Sendo $d^+(v)$ a quantidade de arestas que saem de v, coloque em cada vértice v um total de $d^+(v)$ pedras (isso é possível pois a soma dos graus $d^+(v)$ é igual a m). O novo grafo admite uma origem v, ou seja, de v só saem arestas (verifique!). Escolha esse vértice e inverta todas as arestas de v (ou seja, agora todas as arestas incidentes em v entram nesse vértice). Note que, no novo grafo, ainda temos $d^+(v)$ pedras em cada vértice v e não há ciclos orientados (se a inversão criasse algum ciclo, ele deveria conter v, mas como em v só entra aresta isso não é possível). A partir daí é só repetir a operação: escolha uma origem e inverta suas arestas.

(iii) A demonstração desse caso é motivada pela construção do caso anterior. Oriente novamente o grafo para que não haja ciclos e seja $f(u)$ a quantidade de pedras no vértice u. Considere o seguinte invariante:

$$T = \sum_{v \in V} \text{máx}\{0, f(u) - d^+(u)\}$$

Diremos que um vértice é *deficiente* se $f(u) < d^+(u)$ (note que como a quantidade de pedras é menor do que m sempre existe um vértice deficiente).

Faremos operações que mudarão a orientação dos vértices, f e, consequentemente, T. Provaremos que T nunca aumenta e que se o conjunto dos vértices deficientes muda então T na verdade diminui. Note que isso prova o teorema, pois pelo primeiro lema se o jogo não termina todo vértice é escolhido infinitas vezes e, portanto, nenhum vértice fica deficiente para sempre, com isso, T diminuiria infinitas vezes, o que não é possível pois T é sempre inteiro não negativo.

A cada operação em um vértice u, inverta todas as arestas que *saem* de u e *mantenha* as arestas que entram (isto é, todas as arestas incidentes em u entram em u após a operação). Pelo mesmo argumento do item ii, isso não forma ciclos orientados. O que acontece com T? $f(u)$ diminui em $d(u)$, $d^+(u)$ diminui para zero e, como $f(u) \geq d(u) \geq d^+(u)$, u não era deficiente. Logo a parcela correspondente a u em T diminui em $d(u) - d^+(u)$. O que acontece com os vizinhos de u? Se w recebe aresta de u e não é deficiente, $f(w)$ aumenta em 1 e $d^+(w)$ também aumenta em 1, ou seja, a parcela de w não muda; se w manda aresta para u e não é deficiente, $f(w)$ aumenta em 1 e $d^+(w)$ não muda, ou seja, a parcela de w aumenta em 1; se w recebe aresta de u e é deficiente, $f(w)$ aumenta em 1 e $d^+(w)$ também; deste modo, w continua deficiente e sua parcela continua igual a zero; se w manda aresta de u e é deficiente, $f(w)$ aumenta em 1 e $d^+(w)$ não muda; de qualquer forma, se w deixa de ser deficiente ocorre $f(w) = d^+(w)$ e a sua parcela também não muda. Em resumo: cada vizinho de u aumenta T em no máximo 1 e isso só ocorre quando esse vizinho manda aresta para u. Como há $d(u) - d^+(u)$ vizinhos que mandam arestas para u, T não aumenta. E T não muda só quando todos os vizinhos de u que mandam aresta para u não são deficientes. Como nos outros casos os vizinhos não mudam sua "deficiência", se T não muda então o conjunto dos vértices deficientes não muda. Pela contrapositiva, o teorema está demonstrado. ∎

2.2. Demonstração de que a configuração final não depende da ordem das operações

Agora provaremos que a configuração final não depende da ordem das operações e também, por tabela, que o jogo depende somente da configuração inicial das pedras quando $m \leq N \leq 2m - n$.

A demonstração segue em parte as linhas da outra solução, mas aproveitamos para provar mais alguns resultados sobre palavras que, surpreendentemente, são relacionados (hurra para bijeções!).

2.3. Palavras e idiomas

Vamos modelar cada momento de cada jogo por strings (ou *palavras*) de vértices (numere os vértices de 1 a n) sendo que o vértice v está na posição k se, e somente se, o k-ésimo movimento foi feito no vértice v. Assim, cada palavra representa o histórico de movimentos de cada jogo em andamento ou terminado.

Consideremos todas as palavras finitas formadas por jogadas válidas (mesmo se o jogo for infinito, não consideraremos a palavra infinita das suas jogadas como elemento). Elas formam um conjunto $\mathcal{L}$ que denominaremos *idioma* (porque, afinal, todo idioma tem um conjunto de palavras, não?).

Denotaremos strings de $\mathcal{L}$ por letras minúsculas gregas e um caracter simples de cada palavra (no nosso caso, seria um movimento) por letras minúsculas. Além disso, sendo $\alpha \in \mathcal{L}$ denotamos $[\alpha]$, o *score de* α, como o vetor de ocorrências de cada caracter na palavra, ou seja, a i-ésima coordenada de $[\alpha]$ é igual ao número de vezes que i aparece em α. Além disso, entenderemos $\alpha\beta$ ou αx como concatenação de palavras.

Verificaremos (e não vai ser difícil!) que esse idioma tem as seguintes propriedades:

(H) $\mathcal{L}$ é *hereditária à esquerda* se para toda palavra α pertence a $\mathcal{L}$ qualquer palavra formada pelas primeiras letras à esquerda de α (os seus *prefixos*) também pertence a $\mathcal{L}$. Por exemplo, se $\mathcal{L}$ é hereditária à esquerda e 21224 pertence a $\mathcal{L}$ então $\emptyset$ (a palavra vazia), 2, 21, 212, 2122 também pertencem a $\mathcal{L}$.

(P) $\mathcal{L}$ é *permutável* se para todos $\alpha \in \mathcal{L}$ e caracteres $x \neq y$, se $\alpha x \in \mathcal{L}$ e $\alpha y \in \mathcal{L}$ então $\alpha xy \in \mathcal{L}$.

(L) $\mathcal{L}$ é *localmente livre* se para todos $\alpha, \beta \in \mathcal{L}$ tais que $[\alpha] = [\beta]$ (ou seja, α e β têm as mesmas quantidades de cada caracter) e caracter x temos que se $\alpha x \in \mathcal{L}$ então $\beta x \in \mathcal{L}$.

O que essas propriedades significam em termos de movimentos de um jogo?

(H) Se uma sequência de movimentos é válida, então qualquer sequência com os primeiros movimentos também é válida, o que é o caso do nosso jogo.

(P) Se em algum momento do jogo é possível fazer o movimento x e também o movimento y, então é possível fazer o movimento x e, em seguida, o y. Nós já vimos na solução do problema da OBM que isso ocorre.

(L) Se duas sequências de movimentos têm as mesmas quantidades de cada tipo de movimento, então se é possível fazer um movimento x em um deles é possível também fazer o mesmo movimento no outro. Como a configuração depende apenas das quantidades de movimentos feitos em cada vértice, isso é verdade.

Então o idioma $\mathcal{L}$ dos movimentos do jogo tem as propriedades acima. Mostraremos que se um idioma tem as três propriedades acima então também tem a seguinte propriedade

(F) **Propriedade da permuta forte:** para todos $\alpha, \beta \in \mathcal{L}$ existe uma subpalavra α' de α (só tire alguns caracteres de α) tal que $\beta\alpha' \in \mathcal{L}$ e $[\beta\alpha'] = [\alpha] \vee [\beta]$. Aqui, $[\alpha] \vee [\beta]$ é obtido tomando, para cada coordenada, o valor máximo em $[\alpha]$ e $[\beta]$.

Em termos do jogo, isso quer dizer que dado um momento β do jogo e uma sequência de movimentos α, é possível fazer β "empatar" com α após alguns movimentos. Em particular, se $[\alpha] \geq [\beta]$ (ou seja, em α cada vértice foi escolhido pelo menos tantas vezes quanto em β) então dá para escolher alguns movimentos de α, ou seja, α', para fazer com que o jogo tenha os mesmos movimentos de α, talvez em outra ordem, mesmo que o jogo já tenha começado e estiver no momento β.

Vamos à demonstração em si do teorema.

Teorema 2.2. *Se um idioma $\mathcal{L}$ é hereditária à esquerda, permutável e localmente livre então também tem a propriedade da permuta.*

Demonstração

Indução sobre a soma das coordenadas de $[\alpha] \vee [\beta]$ (que é sempre finita pois α e β são finitos). A base é imediata (há vários casos totalmente imediatos: por exemplo, aqueles em que $[\alpha] \leq [\beta]$).

Sejam, então, α e β duas palavras e suponha que o resultado é válido para todas as palavras γ e δ tais que $[\gamma] \vee [\delta]$ tem soma das coordenadas menor do que $[\alpha] \vee [\beta]$.

Construa α' da seguinte maneira: para cada caracter i seja $[\beta]_i$ a quantidade de caracteres i em β e exclua de α as $[\beta]_i$ primeiras ocorrências de i (se α tem menos de $[\beta]_i$ caracteres i, esclau todos os caracteres i de α). É imediato da construção que $[\beta\alpha'] = [\alpha] \vee [\beta]$, pois só completamos em β o que falta de α. Basta provar que $\beta\alpha'$ pertence a $\mathcal{L}$.

Suponha o contrário e seja $\beta\alpha''$ o maior prefixo de $\beta\alpha'$ que está em $\mathcal{L}$ e x o primeiro caracter à direita de $\beta\alpha''$ em $\beta\alpha'$. Então, lembrando que α' é subpalavra de α, podemos escrever $\alpha = \alpha_1 x \alpha_2$. Novamente pelo modo que construímos α', $[\beta\alpha''] = [\alpha_1] \vee [\beta]$. Como $\beta\alpha''$ tem menos x do que $\beta\alpha'$ e x está em α', α tem mais x do que β e, portanto, a soma das coordenadas de $[\beta\alpha'']$ é menor do que $[\alpha] \vee [\beta]$, podemos aplicar a hipótese de indução para α_1 e $\beta\alpha''$, ou seja, existe uma subpalavra γ de α_1 tal que $\beta\alpha''\gamma \in \mathcal{L}$ e $[\beta\alpha''\gamma] = [\alpha_1]$. Por (L), como por (H) $\alpha_1 x \in \mathcal{L}$ então $\beta\alpha''\gamma x \in \mathcal{L}$. Como γ não tem x (senão $\beta\alpha''$ iria ter mais x do que α_1), podemos aplicar (P) repetidamente para obter que $\beta\alpha'' x\gamma \in \mathcal{L}$. Novamente por (H) $\beta\alpha'' x$ pertence a $\mathcal{L}$, contradizendo a maximalidade de $\beta\alpha''$. Contradição, e portanto $\beta\alpha'$ pertence a $\mathcal{L}$. ∎

Agora vamos definir uma relação de equivalência que vai definir os jogos que terminam. De fato, dizemos que uma palavra é *básica* se não é prefixo de outra palavra. Note que, pela propriedade da permuta forte, todas as palavras básicas têm o mesmo tamanho e o mesmo score. De fato, se duas palavras α e β têm scores diferentes, uma delas, digamos α, tem mais caracteres de um tipo do que β; então é possível achar uma subpalavra não vazia α' de α tal que $\beta\alpha' \in \mathcal{L}$, ou seja, β não pode ser básica. Além disso, pelo mesmo motivo não pode haver palavras maiores. Se um idioma tiver uma palavra básica, chamaremos o tamanho comum de todas as palavras básicas do idioma de *ordem* do idioma. Se não houver palavras básicas, toda palavra pode ser estendida indefinidamente, e dizemos que a ordem do idioma é infinita.

Note que as palavras básicas são aquelas que não podem ser estendidas. Em termos do jogo, elas são os jogos terminados! Então acabamos de provar que se um jogo termina de uma forma, ele sempre termina. Ou seja, se não termina de uma maneira, nunca termina não importa como são os movimentos.

Agora, vamos definir uma relação de equivalência que essencialmente termina a demonstração. Diremos que α e β são equivalentes e denotamos $\alpha \sim \beta$ quando $\alpha\gamma \in \mathcal{L} \iff \beta\gamma \in \mathcal{L}$. Note que isso quer dizer que "tanto faz" utilizarmos α ou β no jogo, o resultado final continua o mesmo. Você pode verificar rapidamente que $\sim$ é uma relação de equivalência (ou seja, ela tem as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva). Chamaremos as classes de equivalência de $\sim$ de *flats*.

Em idiomas hereditários com a propriedade de permuta forte, há um modo simples de caracterizar os flats.

Teorema 2.3. *Se $\mathcal{L}$ é um idioma de ordem finita com as propriedades (H) e (F) então $\alpha \sim \beta$ se, e somente se, $[\alpha] = [\beta]$.*

Demonstração

Suponha que $\alpha \sim \beta$. Estenda α para uma palavra básica $\alpha\gamma$, o que possível por (F). Então $\beta\gamma$ também pertence a $\mathcal{L}$ e deve ser básica (se $\beta\gamma$ pode ser estendida então, pela equivalência entre α e β, $\alpha\gamma$ também). Logo $[\alpha\gamma] = [\beta\gamma] \iff [\alpha] = [\beta]$.

A volta é imediata: basta aplicarmos (L) e (P) repetidas vezes. ∎

Com isso, podemos provar que as configurações finais de jogos finitos são sempre as mesmas.

Teorema 2.4. *Duas sequências de operações α e β levam à mesma posição de pedras nos vértices se, e somente se, $[\alpha] = [\beta]$.*

Demonstração

Se α e β levam à mesma posição então $\alpha \sim \beta$, já que os próximos movimentos são os mesmos para α e β. Então, pelo teorema anterior, $[\alpha] = [\beta]$. Reciprocamente, se $[\alpha] = [\beta]$ os movimentos levam à mesma posição, pois só importa as quantidades de vezes que cada vértice é escolhido. ∎

Com isso, o problema termina, já que as palavras básicas, que correspondem aos jogos terminados, têm o mesmo score.

Exercícios

01. Verifique que apesar do jogo ser permutável ele não é transitivo.

02. Resolva o caso particular unidimensional. Mais especificamente: se há inicialmente N pedras em uma única casinha e cada movimento consiste em escolher uma casinha com duas ou mais pedras, retirar duas dessas pedras e colocar uma pedra em cada uma das duas casinhas vizinhas, prove que o jogo termina após exatamente $k(k+1)(2k+1)/6$ movimentos (sendo $k = \lfloor n/2 \rfloor$) e que, em todas as possibilidades a configuração final consiste em N pedras em N casas consecutivas para N ímpar e N pedras em $N+1$ casas consecutivas, com a casa central vazia, para N par.

03. Verifique que todo grafo direcionado que não tem ciclos tem pelo menos um vértice cujo in-grau é zero (ou seja, dele só saem arestas).

04. Prove que se um idioma satisfaz (F) então é localmente livre e permutável.

Os próximos problemas podem ou não utilizar as ideias apresentadas aqui.

05. Um tabuleiro $n \times n$ é preenchido com peças brancas e pretas de acordo com as seguintes regras: Inicialmente (tabuleiro vazio) uma peça preta é colocada sobre uma casa qualquer; nos movimentos posteriores, uma peça branca é colocada em uma casa vazia e todas as peças, se houver alguma, situadas em casas vizinhas (i.e., com uma aresta em comum) são trocadas por peças de cor oposta. Este processo se prolonga até o tabuleiro estar completamente preenchido. Prove que, ao final do processo, restará pelo menos uma peça preta sobre o tabuleiro.

06. (IMO Shortlist 2005) Há n fichas, cada uma com um lado preto e um lado branco. Elas estão inicialmente em fila com o lado branco para cima. Em cada passo, se possível escolhemos uma ficha com o lado branco para cima que não está em nenhum dos extremos, a retiramos e viramos as suas duas fichas mais próximas, uma à esquerda e outra à direita. Prove que é possível chegar a uma situação com somente duas fichas se, e somente se, $n-1$ não é divisível por 3.

07. (IMO Shortlist 2001) Uma pilha de n pedras está numa coluna vertical. Podemos fazer a seguinte operação: uma pedra pode ser movida se está no topo de uma coluna que contém pelo menos duas pedras a mais do que a coluna imediatamente à sua direita; escolha uma dessas pedras e desloque-a para a coluna imediatamente à sua direita. Se não há pedras que possam ser movidas, obtemos uma configuração final. Prove que, para cada n, não importa como são feitas as operações, a configuração final obtida é única. Descreva-a em função de n.

08. (IMO Shortlist 1998) Considere o seguinte jogo em um tabuleiro $m \times n$ que utiliza mn fichas com um lado preto e um lado branco. Inicialmente, cada quadrado do tabuleiro tem uma ficha com o lado branco para cima, exceto um dos quadrados do canto, que tem uma ficha com o lado preto para cima. Cada movimento consiste em tirar uma ficha com o lado preto para cima e virar todas as fichas em quadrados que têm um lado comum com o quadrado onde estava a ficha retirada. Determine todos os pares (m, n) de inteiros positivos tais que todas as fichas podem ser retiradas do tabuleiro.

09. (IMO Shortlist 1996) Um número finito de moedas é colocado em uma fila infinita de quadrados. Um movimento consiste em escolher um quadrado com mais de uma moeda, retirar duas moedas desse quadrado e mover uma moeda para cada um dos dois quadrados vizinhos. Dada uma configuração inicial de moedas, mostre que qualquer sequência de movimentos termina (ou seja, em algum momento, todo quadrado terá no máximo uma moeda) após a mesma quantidade de movimentos, resultando na mesma configuração final.

10. (IMO Shortlist 1994) 1994 garotas estão sentadas ao redor de um círculo. Inicialmente uma garota tem n cartões. Em cada passo uma garota que tem mais de um cartão passa um cartão para cada uma de suas vizinhas.

(a) Prove que se $n < 1994$, o jogo necessariamente termina.

(b) Prove que se $n = 1994$ o jogo não termina.

3. Referências bibliográficas

[1] A. Björner, L. Lovász, P. W. Shor. Chip-firing games on graphs.