Segundo Simulado On-line para a LI IMO

Maio de 2010

Problema 1. Sejam x, y, z reais positivos tais que $xyz \geq 1$. Prove que

$$\frac{x}{x^3+y^2+z}+\frac{y}{y^3+z^2+x}+\frac{z}{z^3+x^2+y} \leq 1.$$

Problema 2. Prove que existe uma única sequência infinita de inteiros positivos $a_1, a_2, \ldots$ com $a_1 = 1$, $a_2 > 1$ e

$$a_{n+1}^3 + 1 = a_n a_{n+2}$$

para todo n inteiro positivo.

Problema 3. No triângulo $A_1A_2A_3$, para cada $i = 1, 2, 3$ o ex-incírculo tangente ao lado $A_{i+1}A_{i+2}$ toca as semirretas A_iA_{i+1} e A_iA_{i+2} em P_i e Q_i, respectivamente (os índices são considerados módulo 3, de modo que $A_4 = A_1$ e $A_5 = A_2$). As retas P_iP_{i+1} e Q_iQ_{i+2} se cortam em R_i e as retas $P_{i+1}P_{i+2}$ e $Q_{i+1}Q_{i+2}$ se cortam em S_i, $i = 1, 2, 3$. Prove que as retas R_1S_1, R_2S_2 e R_3S_3 são concorrentes.

Language: Portuguese

Duração: 4 horas e 30 minutos
Cada problema vale 7 pontos