Aplicações de Planos Projetivos em Teoria dos Números e Combinatória

1. Definição de plano projetivo

A definição dada aqui é mais geral. Dizemos que um conjunto S é um *plano projetivo* se existem subconjuntos ℓ_1, ℓ_2, ... de S que satisfazem as seguintes propriedades:

(i) Se P e Q pertencem a S, um e somente um dos subconjuntos ℓ_i contém P e Q.

(ii) A interseção de ℓ_i e ℓ_j consiste sempre de um único elemento.

(iii) Existem pelo menos quatro elementos de S tais que, entre eles não haja três contidos em um dos conjuntos ℓ_i.

Os elementos de S são normalmente chamados *pontos* e os subconjuntos ℓ_i, *retas*. Note que a propriedade (i) pode ser entendida como "por dois pontos passa uma única reta" e a propriedade (ii) pode ser entendida como "duas retas encontram-se em um único ponto". A propriedade (iii) nos diz que "existem quatro pontos, três a três não colineares".

Exercícios

01. Um torneio de tênis é disputado entre duas equipes. Cada membro de uma equipe joga com um ou mais membros da outra equipe, de modo que

(i) dois membros de uma mesma equipe têm exatamente um oponente em comum;

(ii) não existem dois membros de uma equipe que enfrentam, juntos, todos os membros da outra equipe.

Prove que cada jogador deve jogar um mesmo número de partidas.

02. Mostre que as seguintes proposições são equivalentes em planos projetivos:

(1) Existe uma reta que passa por exatamente $n+1$ pontos;

(2) Existe um ponto que está contido em exatamente $n+1$ retas;

(3) Todas as retas passam por exatamente $n+1$ pontos;

(4) Todos os pontos estão contidos em exatamente $n+1$ retas;

(5) Há exatamente n^2+n+1 retas;

(6) O plano projetivo tem exatamente n^2+n+1 pontos (diz-se que o plano projetivo tem *ordem* n).

03. (Cone Sul 1998) O Prefeito de uma cidade deseja estabelecer um sistema de transportes com pelo menos uma linha de ônibus, no qual:

(i) cada linha passe exatamente por três paradas;

(ii) cada duas linhas distintas tenham exatamente uma parada em comum;

(iii) para cada duas paradas de ônibus distintas exista exatamente uma linha que passe por ambas.

Determine o número de paradas de ônibus da cidade.

Dica: com o que parecem as condições (ii) e (iii)? Para encontrar os possíveis valores, faça uma contagem dupla.

2. Construção de planos projetivos baseados em corpos

Seja K um corpo (ou seja, um conjunto onde estão definidas duas operações, $+$ e $\cdot$, tal que todo elemento admite oposto e todo elemento não nulo admite inverso). Então o conjunto $P_2(K)$ de ternas $(x,y,z) \neq (0,0,0)$, $x,y,z \in K$, onde ternas da forma (x,y,z) e (kx,ky,kz) devem ser consideradas iguais, é um plano projetivo na qual a reta correspondente ao ponto (a,b,c) (a partir de agora, chamaremos tal reta de *dual* de (a,b,c)) é o conjunto de pontos (x,y,z) que satisfazem

$$ax + by + cz = 0$$

Demonstração

Basta mostrar que o conjunto dado tem as propriedades (i), (ii) e (iii).

(i) Sejam (x_1,y_1,z_1) e (x_2,y_2,z_2) pontos distintos, ou seja, tais que não existe $\lambda \in K$ tal que $(x_1,y_1,z_1) = \lambda(x_2,y_2,z_2)$. Temos que mostrar que existe somente uma reta que contém ambos os pontos, ou seja, que existe um única terna (a,b,c) (que são os coeficientes da reta) tal que

$$\left| \begin{array}{l} ax_1 + by_1 + cz_1 = 0 \\ ax_2 + by_2 + cz_2 = 0 \end{array} \right. \qquad (*)$$

Vejamos $(*)$ como um sistema em a, b e c.

Como $(x_1,y_1,z_1) \neq \lambda(x_2,y_2,z_2)$ para todo $\lambda \in K$, a matriz completa $C = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix}$ do sistema $(*)$ tem posto 2. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \neq 0$. Logo, resolvendo $(*)$ em a e b, obtemos (verifique!) $a = mc$ e $b = nc$, onde m e n são constantes de K. Logo as soluções de $(*)$ são da forma $(mc, nc, c) = c(m,n,1)$. Note que $c \neq 0$ pois $c = 0$ implicaria $a = b = c = 0$. Assim, no plano projetivo $P_2(K)$, todas as soluções são equivalentes, ou seja, é única. Logo existe somente uma reta que passa por esses dois pontos.

(ii) Análogo ao item (i). Tente você fazer!

(iii) Observe que $(1,1,1)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$ satisfazem essa condições. Aqui, 0 e 1 são os elementos neutros da soma e produto em K, respectivamente.

3. Dualidade

Observe que se r e s são as retas duais dos pontos $R = (a,b,c)$ e $S = (d,e,f)$ de $P_2(K)$, respectivamente, então

$$R \in s \iff da + eb + fc = 0 \iff ad + be + cf = 0 \iff S \in r$$

A propriedade $R \in s \iff S \in r$ é a chave do *princípio da dualidade*. Por isso, pontos e retas no plano projetivo se comportam de maneira semelhante quando se fala de incidência.

4. O caso $K = R$

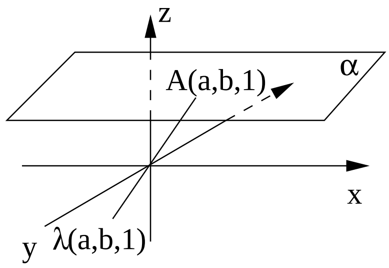
Quando $K = R$, temos o plano projetivo $P_2(R)$ visto na referência [2]. Vamos entender a semelhança entre o plano definido aqui e o plano estudado em [2] (se você não leu essa referência, você pode pular essa seção; mas leia o artigo, ele realmente vale muito a pena!!).

Primeiro, vamos explicar a primeira "estranheza" do plano projetivo $P_2(R)$. Por que ele tem três coordenadas, e não duas? A coordenada adicional é que faz aparecerem pontos e retas no infinito. Podemos fazer a seguinte correspondência: o ponto (x,y) do plano R^2 corresponde ao ponto $(x,y,1)$ de $P_2(R)$. Sobraram os pontos do tipo $(x,y,0)$ de $P_2(R)$, que são os pontos do infinito.

A reta $ax + by + c = 0$ de R^2 pode ser transformada na reta $ax + by + cz = 0$ de $P_2(R)$ substituindo-se x e y na reta de R^2 por x/z e y/z. Aqui, nós *homogeneizamos* a equação $ax + by + c = 0$.

Você pode visualizar a correspondência que fizemos da seguinte forma: se imaginarmos as ternas (x,y,z) como pontos no espaço, percebemos que os pontos de $P_2(R)$ correspondem a retas que passam pela origem.

Se tomarmos o plano α: $z = 1$ de R^3, por exemplo, fazemos corresponder um ponto de $P_2(R)$ com o traço da reta correspondente nesse plano.



A reta dual de (a, b, c) corresponderia ao traço do plano $ax + by + cz = 0$ em π.

Com alguns cálculos verifica-se que se $R = (a, b, c)$ e r: $ax + by + cz = 0$, então, sendo $O = (0, 0, 1)$, R' e r' os respectivos correspondentes ao ponto R e à reta r em α, então $OR' \perp r'$.

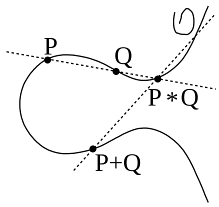
4.1. O plano projetivo e curvas elípticas

Considere a curva cúbica de R^2

$$ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 + ex^2 + fxy + gy^2 + hx + iy + j = 0, \qquad (**)$$

onde todas as letras de a a j são números racionais.

Gigantesco, não? Estamos interessados em saber sobre os seus pontos racionais (isto é, cujas coordenadas são ambas racionais). Para isso, é feita a seguinte operação: tomamos um ponto racional da curva, denominado $\mathcal{O}$. Dados dois pontos P e Q racionais da curva, encontre o terceiro ponto $P * Q$ de interseção de PQ com a curva. Defina $P + Q$ (isso mesmo, estamos somando pontos!) como o terceiro ponto de interseção da reta que passa por $\mathcal{O}$ e $P * Q$ com a curva (isto é, $P + Q = \mathcal{O} * (P * Q)$). Pode-se provar que $P + Q$ também é um ponto racional.



Só que a gigantesca equação $(**)$ pode ser simplificada para a forma

$$y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c, \qquad (\star)$$

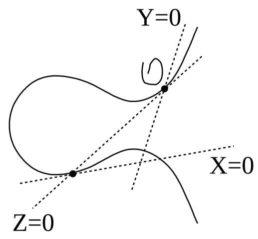
que é bem mais simples (esta é a *forma de Weierstrass*). Para isso, usamos a geometria projetiva.

Vamos fazer um caso particular. Considere a curva $u^3 + 2v^3 = 2uv + 1$. Um de seus pontos racionais é $(1; 1)$.

Primeiro devemos homogeneizar a curva, fazendo $u = U/W$ e $v = V/W$, obtendo $U^3 + 2V^3 = 2UVW + W^3$. Note que agora vamos trabalhar no plano projetivo $P_2(R)$.

Depois, escolhemos um ponto racional $\mathcal{O}$ na curva. Uma escolha é $\mathcal{O} = (1; 1; 1)$.

Agora, nós vamos mudar as coordenadas. A tangente à curva pelo ponto $\mathcal{O}$ é o nosso eixo de equação $Z = 0$. Se a tangente encontra a curva novamente em P (isso sempre ocorre se $\mathcal{O}$ não for ponto de inflexão), o eixo de equação $X = 0$ é a tangente à curva que passa por P. O eixo de equação $Y = 0$ pode ser qualquer reta que passe por $\mathcal{O}$. Se $\mathcal{O}$ for ponto de inflexão, podemos escolher qualquer reta que não passa por $\mathcal{O}$ como o eixo $X = 0$. Observe que como $P_2(R)$ tem três coordenadas, precisamos de três eixos.



Fazendo algumas contas (use um pouquinho de cálculo; para trabalhar só com duas variáveis, "desomogeneize" – essa palavra existe? – a equação), obtemos que a tangente a $\mathcal{O} = (1; 1; 1)$ é a reta $U + 4V - 5W = 0$. Esta reta corta novamente a curva em $(-3; 2; 1)$. A tangente por esse ponto (use cálculo novamente!) é $23U + 30V + 9W = 0$. Por fim, tomamos a reta $U - V = 0$ como o eixo $Y = 0$. Assim, queremos que

$$\left|\begin{array}{l} U + \ 4V - 5W = Z \\ 62U - 62V \qquad = Y \\ 23U + 30V + 9W = X \end{array}\right. \iff \left|\begin{array}{l} U = \dfrac{5X + 3Y + 9Z}{310} \\ V = \dfrac{5X - 2Y + 9Z}{310} \\ W = \dfrac{5X - Y - 53Z}{310} \end{array}\right.$$

(usamos $Y = 62U - 62V$ para simplificar um pouco as contas)

Substituindo U, V e W (veja que o 310 dos denominadores vai cancelar), temos

$$(5X+3Y+9Z)^3+2(5X-2Y+9Z)^3 = 2(5X+3Y+9Z)\cdot(5X-2Y+9Z)\cdot(5X-Y-53Z)+(5X-Y-53Z)^3$$

A equação parece mais gigantesca que antes, mas após "desomogeneizar" (basta substituir $Z = 1$) e abrir tudo (eu colocaria as contas, mas a margem neste artigo é muito pequena para isso) obtemos

$$xy^2 - (4x - 30)y = -\frac{25}{62}x^2 + \frac{5721}{31}x - \frac{26865}{62}$$

Em geral, quando fazemos essa mudança de eixos (a transformação que fizemos ao resolver o sistema é uma *transformação projetiva*) a equação se reduz à forma

$$xy^2 + (ax + b)y = cx^2 + dx + e$$

Multiplicando por x nos dois membros, temos

$$(xy)^2 + (ax + b)xy = cx^3 + dx^2 + ex$$

Agora substitua $z = xy$:

$$z^2 + (ax + b)z = cx^3 + dx^2 + ex$$

Completando quadrado no primeiro membro e substituindo $z + \frac{1}{2}(ax + b)$ por w chegamos finalmente em

$$t^2 = \text{cúbica em } x$$

Para a cúbica ser mônica (ou seja, ter coeficiente dominante unitário e não, ser dentuça), como o coeficiente dominante é c, basta multiplicar ambos os membros por c^2 e fazer as substituições (são as últimas!) $t = u/c$ e $x = v/c$. Vamos fazer isso no nosso exemplo.

Multiplicando por x, fazendo $z = xy$ e completando quadrado:

$$z^2 - (4x - 30)z + (2x - 15)^2 = -\frac{25}{62}x^3 + \frac{5721}{31}x^2 - \frac{26865}{62}x + (2x - 15)^2$$
$$\iff (z - 2x + 15)^2 = -\frac{25}{62}x^3 + \frac{5845}{31}x^2 - \frac{30585}{62}x + 225$$

Agora, $t = z - 2x + 15$:

$$t^2 = -\frac{25}{62}x^3 + \frac{5845}{31}x^2 - \frac{30585}{62}x + 225$$

Por fim, $t = -\frac{62}{25}m$ e $x = -\frac{62}{25}n$ e chegamos à forma de Weierstrass:

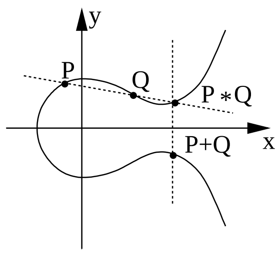
$$m^2 = n^3 + \frac{5845}{31}n^2 + \frac{764625}{3844}n + \frac{140625}{3844}$$

Se você escrever m e n em função de u e v (e vice-versa), vai obter funções racionais (isto é, o quociente de dois polinômios) com todos os coeficientes racionais. Logo pontos racionais são transformados em pontos racionais, de modo que achar os pontos racionais da curva original é a mesma coisa que achar os pontos racionais da curva na forma de Weierstrass (fora, é claro, os pontos que anulam os denominadores das funções racionais, que não são muitos e são fáceis de achar).

Qual a vantagem da forma de Weierstrass? A vantagem é que podemos normalizar a curva para a forma $(\star)$, além da soma de pontos. O ponto $\mathcal{O}$ pode ser um ponto do infinito, por exemplo. Homogeneizando $(\star)$, obtemos

$$Y^2Z = X^3 + aX^2Z + bXZ^2 + cZ^3,$$

e não é difícil ver que o ponto do infinito $(0; 1; 0)$ pertence à curva (e além disso, é o único!). Então podemos fazer $\mathcal{O} = (0; 1; 0)$. Isso facilita um pouco as contas para adição de pontos. Se $P * Q = (a; b)$ ($(a; b; 1)$ no plano projetivo), a reta que passa por $\mathcal{O}$ e $P * Q$ é $Y = bZ$, ou $y = b$. Conseqüentemente, como a curva é simétrica em relação ao eixo Ox, temos $P + Q = (a; -b)$.



Exercícios

04. Prove que se P e Q são pontos racionais numa cúbica então $P + Q$ também é racional.

05. Transforme a cúbica $u^3 + v^3 = \alpha$ na forma de Weierstrass (um ponto racional da curva homogeneizada é $(1; -1; 0)$ e a conta não é tão terrível assim).

06. (OBM 2002, nível U) Considere a curva $C = \{(x; y) \in R^2 \mid y^2 = x^3 - 43x + 166\}$.

(a) Seja $Q = (a; b)$ um ponto de C. Suponha que a reta tangente a C no ponto Q intersecte C num único outro ponto, Q'. Determine as coordenadas de Q'.

(b) Seja $P_0 = (3; 8)$. Para cada inteiro não negativo n, definimos $P_{n+1} = P'_n$, o ponto de interseção de C com a reta tangente a C em P_n. Determine P_{2002}.

07. A adição de pontos é definida somente quando a cúbica no segundo membro de $(\star)$ tem três raízes distintas (não necessariamente todas reais). Os outros casos são mais fáceis!

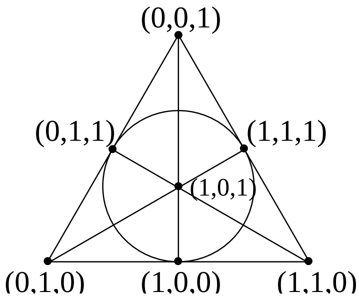
(a) Encontre todos os pontos racionais da curva $y^2 = x^2(x-1)$.

(b) Encontre todos os pontos racionais da curva $y^2 = x^3$.

5. O caso $K = Z/pZ$

Sendo K qualquer corpo, podemos tomar $K = Z/pZ$ (os inteiros vistos $\text{mód } p$), em que p é um primo. Nesse caso, sendo Z/pZ um corpo finito (com p elementos) o plano projetivo $P_2(Z/pZ)$ é finito.

Por exemplo, fazendo $p = 2$, obtemos o plano de Fano (rimou!), como pode ser visto na figura.



Vamos fazer algumas continhas.

6. Algumas contagens

6.1. Número de elementos de $P_2(Z/pZ)$

Temos $p^3 - 1$ ternas $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Como (a, b, c) é equivalente a $\lambda(a, b, c)$ e λ pode assumir $p-1$ valores (1 a $p-1$), cada ponto está sendo contado $p-1$ vezes. Logo $P_2(Z/pZ)$ tem $\frac{p^3-1}{p-1} = p^2 + p + 1$ pontos.

Observe que, pelo princípio da dualidade, há também $p^2 + p + 1$ retas.

6.2. Número de pontos em cada reta

Fixados a, b e c, não todos nulos, queremos contar o número de soluções não equivalentes $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ da congruência

$$ax + by + cz \equiv 0 \pmod{p} \qquad (***)$$

Suponhamos, sem perda de generalidade, que $c \not\equiv 0 \pmod{p}$. Temos então

$$(***) \iff z \equiv -ac^{-1}x - bc^{-1}y \pmod{p}$$

Podemos escolher x e y de p^2 maneiras. Porém, não podemos escolher $x = y = 0$, pois isso implicaria $z = 0$. Logo, considerando que cada elemento de $P_2(Z/pZ)$ tem $p-1$ equivalentes, temos que cada reta tem $\frac{p^2-1}{p-1} = p + 1$ pontos.

6.3. Número de retas que passam por um ponto

Pelo princípio da dualidade, há $p + 1$ retas que passam por um ponto dado.

7. Um problema

A seguir, o problema 3 da Olimpíada Iberoamericana de 1996, realizada na Costa Rica.

Temos um tabuleiro quadriculado de $k^2 - k + 1$ linhas e $k^2 - k + 1$ colunas, onde $k = p + 1$ e p é um número primo. Para cada primo p, dê um método para distribuir números 0 e 1, um número em cada casa *do tabuleiro, de modo que em cada linha haja exatamente k números 0, em cada coluna haja exatamente k números 0 e, além disso, não haja nenhum retângulo, de lados paralelos aos lados do tabuleiro, com números 0 em seus quatro vértices.*

Resolução

Para $k = p+1$, $k^2 - k + 1 = (p+1)^2 - (p+1) + 1 = p^2 + p + 1$ (coincidência? destino? ou puramente sorte?). Assim, devemos preencher um tabuleiro $(p^2 + p + 1) \times (p^2 + p + 1)$ com 0 e 1 de modo que haja $p + 1$ (que coisa...) 0 em cada linha e coluna, e sem retângulos com 0 como vértices.

Considere o plano projetivo $P_2(Z/pZ)$ (por que será?) e a cada linha associe um ponto e a cada coluna associe uma reta. Coloque 0 na casa (i, j) se, e somente se, o ponto i pertence à reta j. Nas demais casas, coloque 1.

Há claramente $p + 1$ zeros em cada coluna. Pelo princípio da dualidade, também há $p + 1$ zeros em cada linha.

Agora, suponha que exista um retângulo de vértices (a, c), (a, d), (b, c) e (b, d), $a \neq b$ e $c \neq d$, todos com 0. Logo, pela nossa construção, os pontos a e b pertencem a ambas as retas c e d. Absurdo, pois a interseção de duas retas é exatamente um ponto. ∎

É claro que na prova você teria que demonstrar todas as propriedades que demonstramos antes.

8. Outros fatos sobre planos projetivos finitos

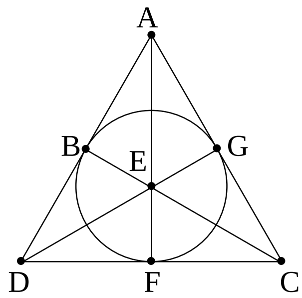
A construção baseada em corpos vale para qualquer corpo. Mas, infelizmente, o número de elementos de um corpo finito deve ser potência de primo (um corpo com p^n elementos, p primo, n inteiro positivo, é o conjunto dos polinômios com coeficientes em Z/pZ, vistos módulo um polinômio $P(x)$ de grau n e irredutível em $Z/pZ[x]$). Assim, tal construção só nos permite construir planos projetivos de ordem potência de primo. Será que existem planos projetivos com outra ordem? Conjectura-se que não, porém esse problema continua em aberto. O teorema de Bruck-Ryser-Chowla ajuda um pouquinho, dizendo que se $n \equiv 1 \pmod{4}$ ou $n \equiv 2 \pmod{4}$ e n é ordem de um plano projetivo então n deve ser soma de dois quadrados. Pensando nos casos pequenos, esse teorema elimina o caso $n = 6$. A demonstração de que não existe plano projetivo de ordem $n = 10$ foi obtida em 1989 por C. W. H. Lam (com o auxílio de um computador!) e a história da prova está disponível em [7]. O caso $n = 12$ está em aberto.

Planos projetivos também servem para construir alguns *block designs*. Um *block design* consiste num sistema de incidência (v, k, λ, r, b) na qual um conjunto X de v pontos é particionado numa família A de b subconjuntos (chamados *blocks*) de modo que dois pontos quaisquer determinam λ blocks com k pontos em cada block, e cada ponto está contido em r blocks. Na verdade, os cinco parâmetros não são independentes. Fica como exercício para você mostrar que $vr = bk$ e $\lambda(v - 1) = r(k - 1)$ (são duas contagens duplas). Assim, pode-se representar o block design simplesmente como (v, k, λ). Se $b = v$ (e, conseqüentemente, $r = k$) o block design é dito *simétrico*. Note que um plano projetivo de ordem n é o block design $(n^2 + n + 1, n, 1)$. Outros exemplos e mais informações podem ser encontrados no site `http://mathworld.wolfram.com/BlockDesign.html`.

Exercícios

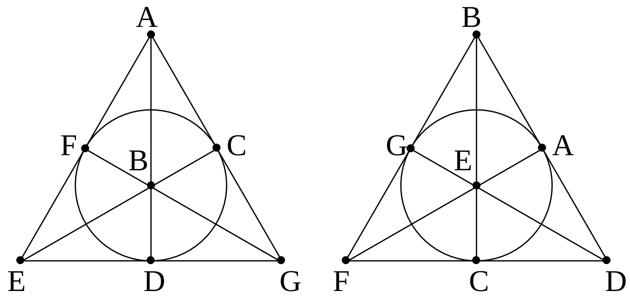
08. (OPM 2001) No condado Heptaprojetivo havia 7 castelos, batizados segundo grandes personagens: Arnold (A), Borcherds (B), Conway (C), Dilbert (D), Erdős (E), Faltings (F), Gowers (G). Havia também

7 ruas, cada uma com 3 castelos, como mostra o mapa a seguir (uma rua é circular):



Um belo dia, o conde Steiner decidiu retirar as placas que identificavam os castelos para fazer uma limpeza. Na hora de recolocá-las, ninguém se lembrava do lugar correto de cada uma, nem mesmo os moradores dos castelos! Os arquivos do condado só indicavam os castelos que ficavam numa mesma rua, mas não a ordem em que eles estavam. Assim, o conde sabia que havia uma rua com os castelos $\{A, B, D\}$, outra com $\{B, C, E\}$, outra com $\{B, F, G\}$, etc.

Frente aos fatos, Steiner resolveu determinar todas as maneiras de recolocar as placas respeitando os arquivos do condado, isto é, todas as maneiras nas quais placas que estavam juntas em uma mesma rua continuassem juntas em uma rua, possivelmente em outra ordem. Duas destas maneiras estão representadas a seguir:



Chamaremos essas maneiras de *válidas*.

(a) Prove que o total de maneiras válidas é 7 vezes o número de maneiras válidas nas quais a placa A é colocada no castelo A.

(b) Prove que o total de maneiras válidas nas quais a placa A é colocada no castelo A é 6 vezes o número de maneiras válidas nas quais a placa A é colocada no castelo A e a placa B é colocada no castelo B.

(c) Determine o número de maneiras válidas.

09. No reino da Alândia há n cidades, assim como no reino da Belândia. Foram construídas m estradas, sendo que cada estrada passa por exatamente duas cidades, uma de cada reino. Mostre que se não existem quatro cidades ligadas por um ciclo de estradas, então

$$m \leq \frac{n}{4}\left(1 + \sqrt{4n-3}\right)$$

Mostre que a igualdade pode ocorrer para infinitos valores de n.

Dicas: a desigualdade pode ser demonstrada com uma injeção e contagem dupla – veja o artigo Grafos e Contagem Dupla, na Eureka! 12; para mostrar que a igualdade pode ocorrer para infinitos valores de n, encontre primeiro os valores de n para os quais $4n-3$ é um quadrado perfeito – você vai se surpreender!

10. (Extensão do exemplo do artigo *Grafos e Contagem Dupla*) Na Terra de Oz há n castelos e várias estradas, sendo que cada uma liga dois castelos. Diz a lenda que se houver quatro castelos ligados em ciclo

(ou seja, se existirem quatro castelos A, B, C e D tais que A e B, B e C, C e D e D e A estão ligados), um dragão aparecerá do centro dos castelos e destruirá a Terra de Oz. Mostre que para esta desgraça não acontecer o número de estradas deve ser menor ou igual a $\left(1+\sqrt{4n-3}\right)\frac{n}{4}$ e mostre que é possível construir $\left(1+\sqrt{4n-3}\right)\frac{n-1}{4}$ estradas (para mostrar isto você vai precisar saber um pouco de Álgebra Linear).

9. Referências Bibliográficas

[1] *D. Pedoe, Geometry: A Comprehensive Course.* Este livro tem um bom texto não somente introdutório sobre geometria projetiva e contém mais aplicações geométricas. Os problemas 1 e 2 e os axiomas de planos projetivos foram retirados deste livro, assim como a construção de planos projetivos com coordenadas.

[2] *L. Castro, Introdução à Geometria Projetiva, Revista Eureka! 8.* A melhor referência que conheço para começar a estudar geometria projetiva aplicada a problemas de geometria.

[3] O problema 9 foi adaptado de um exemplo retirado do livro *Graph Theory: An Introductory Course*, de B. Bollobás. Ele é um caso particular do *problema de Zaranckiewsky*: qual é o número máximo de arestas de um grafo bipartido com m vértices em uma classe V_1 e n vértices na outra classe V_2, de modo que não haja nenhum subgrafo bipartido completo com r vértices de V_1 e s vértices de V_2? Tal número é normalmente representado por $z(m;n;r;s)$.

[4] O problema 10 é uma extensão de um exemplo de meu artigo *Grafos e Contagem Dupla*, que está na *Revista Eureka! 12.*

[5] A construção do exemplo do problema 10 pode ser encontrada no livro *Proofs From The Book*, de Martin Aigner e Günter M. Ziegler. Mas tente você mesmo fazê-la antes!

[6] Curvas elípticas e a redução para a forma de Weierstrass podem ser encontradas em *Rational Points on Elliptic Curves*, de Joseph H. Silverman e John Tate.

[7] A história da demonstração de que não existe plano projetivo de ordem 10 está em

`http://www.cecm.sfu.ca/organics/papers/lam/paper/html/paper.html`

[8] Um glossário de termos da Matemática e principais fatos relacionados está em

`http://mathworld.wolfram.com/`

[9] Uma discussão muito interessante sobre o assunto está em

`http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/~sillke/PUZZLES/projective_plane`

(o grande matemático John Conway inclusive participa dessa discussão).