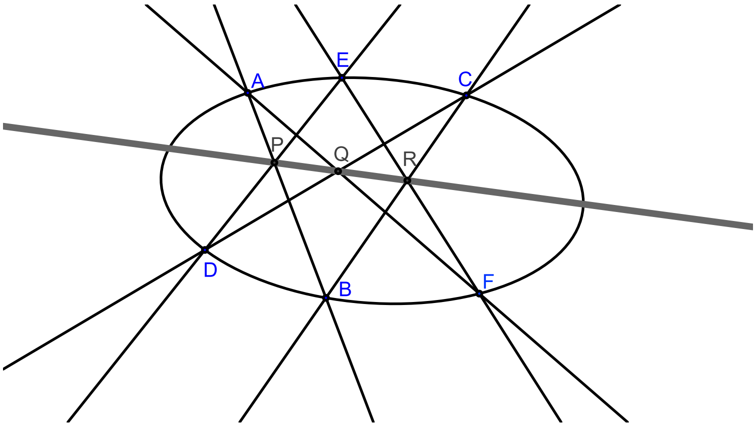
Uma demonstração algébrica dos Teoremas de Pascal e de Pappus

Um dos teoremas mais bonitos da Matemática é o teorema de Pascal:

Teorema de Pascal. *Dados seis pontos A, B, C, D, E e F sobre uma circunferência, não necessariamente distintos, as interseções de AB e DE; BC e EF; CD e FA são colineares.*

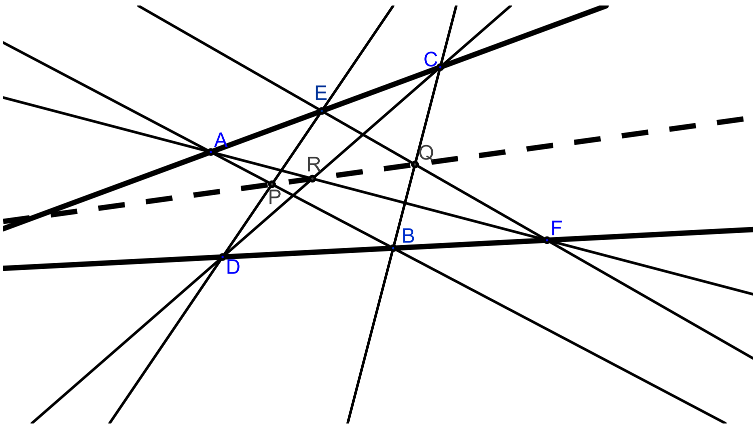
A demonstração sintética desse teorema pode ser encontrada em [1].

Sabe-se que esse teorema pode ser generalizado para cônicas, que são curvas cujas equações no plano cartesiano têm grau 2: parábolas, elipses, hipérboles, circunferências e pares de retas. Isto é, os seis pontos podem pertencer a uma cônica qualquer; em particular, a uma circunferência.



Provaremos o teorema de Pascal na versão com cônicas, demonstrando também o teorema de Pappus:

Teorema de Pappus. *Sejam A, C e E pontos sobre uma reta r e B, D e F pontos sobre uma reta s. Sejam P, Q e R os pontos de interseção de AB e DE; BC e EF; CD e FA. Então P, Q e R são colineares.*



Demonstração

Basta aplicar o Teorema de Pascal na cônica formada por r e s. ∎

A demonstração que daremos aqui é algébrica e baseia em um teorema de curvas algébricas. A primeira vez que vi essa demonstração foi com o professor Eduardo Tengan.

1. O outro teorema de Bezóut

...e esse é o tal teorema! Antes de enunciá-lo, definimos *grau* de um polinômio de mais de uma variável com a maior soma dos graus das variáveis no mesmo termo. Por exemplo, o grau de $x^2y + y^2 + x + 2 = 0$ é $2 + 1 = 3$ (observe o termo x^2y).

Observação: caso você esteja se perguntando qual é o "primeiro" teorema de Bezóut, veja [2].

Teorema de Bezóut. *Sejam $P(x, y) = 0$ e $Q(x, y) = 0$ polinômios de duas variáveis de graus m e n, respectivamente, sem fatores comuns. Então os gráficos dessas curvas têm no máximo mn pontos de interseção.*

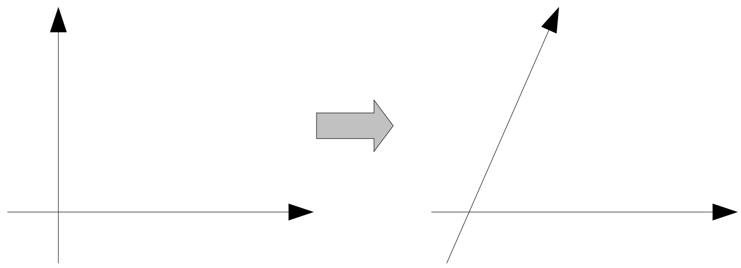
Vamos demonstrar esse teorema em alguns passos.

2. Passo 1: desalinhando os astros

Lema. *Podemos supor, sem perda de generalidade, que todos os pontos de interseção de P e Q têm abscissas diferentes.*

Demonstração

Primeiro, note que P e Q não podem ter infinitos pontos de interseção (caso contrário, P e Q teriam fatores em comum – basta ver os dois polinômios como polinômios na variável x, interpretando y como um parâmetro). Então o conjunto R das retas que passam por pelo menos dois dos pontos de interseção é finito. Seja m um real que *não é* o coeficiente angular de alguma reta de R. "Incline" o eixo y de modo que ele fique com coeficiente angular m, ou seja, aplique a transformação afim $(x, y) \mapsto (x - y/m; y)$. Se dois pontos tiverem a mesma abscissa nesse novo sistema de coordenadas teremos $x_1 - y_1/m = x_2 - y_2/m$ no sistema antigo (sendo (x_1, y_1) e (x_2, y_2) as coordenadas dos pontos no sistema antigo). Mas a última equação é equivalente a $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, que é o mesmo que dizer que os pontos determinam, no sistema antigo, uma reta de coeficiente angular m. Assim, não há pontos de interseção com mesma coordenada x. ∎



Agora, vamos usar a idéia de *resultante*.

2.1. Passo 2: Resultante

Uma maneira de determinar se equações algébricas têm raízes comuns é utilizar determinantes. Vamos ilustrar isso com um exemplo. Vamos determinar se $A(x) = x^3 - 7x^2 + 13x - 4$ e $B(x) = x^2 - 3x + 1$ têm raízes comuns. Sendo r essa raiz comum, então, multiplicando as duas equações por potências de r ($\partial B = 2$ equações com $A(x)$ e $\partial A = 3$ equações com $B(x)$) obtemos

$$\left|\begin{array}{l} -4 + 13r - 7r^2 + r^3 = 0 \\ -4r + 13r^2 - 7r^3 + r^4 = 0 \\ 1 - 3r + r^2 = 0 \\ r - 3r^2 + r^3 = 0 \\ r^2 - 3r^3 + r^4 = 0 \end{array}\right. \iff \begin{pmatrix} -4 & 13 & -7 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 13 & -7 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ r \\ r^2 \\ r^3 \\ r^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Isso significa que o sistema

$$\begin{pmatrix} -4 & 13 & -7 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 13 & -7 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

tem solução não trivial. Assim, os dois polinômios admitem raízes comuns se, e somente se,

$$\det \begin{pmatrix} -4 & 13 & -7 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 13 & -7 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

Calculando o determinante obtemos 0, e os polinômios admitem pelo menos uma raiz comum (a saber, $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ e $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$).

Agora, vamos aplicar essa técnica para provar o teorema de Bézout.

Considere $P(x,y)$ e $Q(x,y)$ como polinômios em x, sendo y um parâmetro. As coordenadas x dos pontos de interseção das duas curvas correspondem às raízes comuns de $P(x,y)$ e $Q(x,y)$. Assim, sendo

$$\begin{aligned} P(x,y) &= a_0(y)x^m + a_1(y)x^{m-1} + \cdots + a_m(y) \\ Q(x,y) &= b_0(y)x^n + b_1(y)x^{n-1} + \cdots + b_n(y) \end{aligned}$$

temos que a_i e b_i são polinômios de grau no máximo i em y. Assim, nas interseções, a resultante de P e Q, que é o determinante $(m+n)\times(m+n)$, é igual a 0:

$$\det \begin{pmatrix} a_m & a_{m-1} & a_{m-2} & \dots & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_m & a_{m-1} & \dots & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & a_0 \\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & b_0 \end{pmatrix} = 0$$

Note que na matriz anterior, a diagonal começa com a_m's e termina com b_0's. Um exemplo é

$$\det \begin{pmatrix} a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ b_2 & b_1 & b_0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & b_1 & b_0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & b_1 & b_0 \end{pmatrix} = 0$$

A matriz a seguir indica os graus máximos (em y) dos elementos da matriz (não colocamos quando é zero). À direita, colocamos o nosso exemplo:

$$\begin{pmatrix} m & m-1 & m-2 & \dots & 0 & & \dots & \\ & m & m-1 & \dots & 1 & 0 & \dots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & \dots & & & \dots & 0 \\ n & n-1 & n-2 & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & \dots & & & \dots & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & \\ & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & & \\ & 2 & 1 & 0 & \\ & & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Como nos espaços vazios temos zeros, os termos no determinante que os utilizam serão iguais a zero, e podemos preencher o resto da matriz de graus com graus maiores e negativos (em negrito):

$$\begin{pmatrix} m & m-1 & m-2 & \dots & 0 & \mathbf{-1} & \dots & \mathbf{-n+1} \\ \mathbf{m+1} & m & m-1 & \dots & 1 & 0 & \dots & \mathbf{-n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{m+n-1} & \mathbf{m+n-2} & \mathbf{m+n-3} & \dots & & & \dots & 0 \\ n & n-1 & n-2 & \dots & \dots & \dots & \dots & \mathbf{-m+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{n+m-1} & \mathbf{n+m-2} & \mathbf{m+n-3} & \dots & & & \dots & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & \mathbf{-1} \\ \mathbf{4} & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & \mathbf{-1} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{3} & 2 & 1 & 0 & \mathbf{-1} \\ \mathbf{4} & \mathbf{3} & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Com isso, o grau máximo de todos os termos no determinante é sempre igual a mn (verifique!). O determinante vai ser, então, um polinômio de grau no máximo mn em y e tem, portanto, no máximo mn raízes. Isso quer dizer que há no máximo mn valores de y para os quais $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ são simultaneamente nulos, ou seja, os pontos de interseção têm no máximo mn ordenadas. Como não há dois valores de x para cada y (pois podemos supor, sem perda de generalidade, que não há pontos de interseção com a mesma abscissa), há no máximo mn pontos de interseção e provamos o teorema de Bézout. ∎

2.2. Generalizações

Na verdade, pode-se provar, com ferramentas um pouco mais avançadas que, no plano projetivo, a quantidade de interseções é *exatamente* igual a mn, contando multiplicidades. A prova pode ser vista em [3] (e na referência citada em [3]).

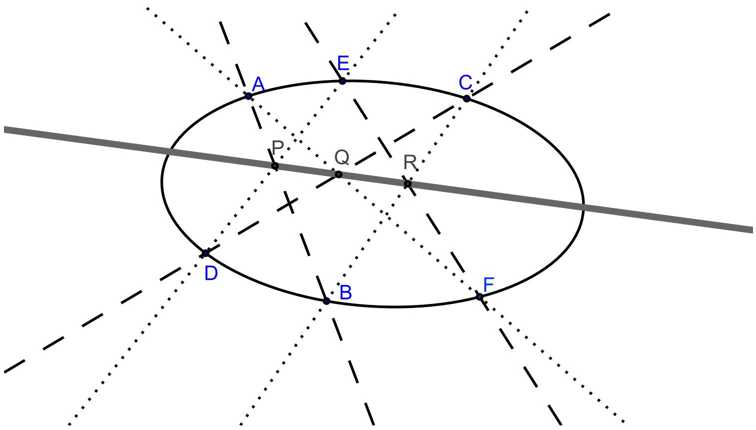
3. Teorema de Pascal via Teorema de Bezóut

O que tem curvas algébricas a ver com o teorema de Pascal? Tudo! Observe que, sendo F e G formas descritivas, $F \cdot G = 0 \iff F = 0$ ou $G = 0$. Isso quer dizer que podemos transformar a união de gráficos em um polinômio só! Vamos relembrar o teorema e demonstrá-lo:

Teorema de Pascal. *Dados seis pontos A, B, C, D, E e F sobre uma cônica, não necessariamente distintos, as interseções de AB e DE; BC e EF; CD e FA são colineares.*

Demonstração

Seja $L_r = 0$ a equação geral da reta r. Então a união das retas AB, CD e EF tem equação $P(x, y) = L_{AB} \cdot L_{CD} \cdot L_{EF} = 0$ e a união das retas BC, DE e FA tem equação $Q(x, y) = L_{BC} \cdot L_{DE} \cdot L_{FA} = 0$. Só que L_r tem grau 1, então P e Q têm ambos grau 3. Pelo teorema de Bezóut, as uniões das retas têm no máximo $3 \cdot 3 = 9$ pontos de interseção. Na figura, o gráfico de P está tracejado e o gráfico de Q está pontilhado.



Note na figura que temos as nossas 9 interseções: A, B, C, D, E, F, P, Q e R.

Considere agora a cúbica

$$H(x,y) = \alpha \cdot L_{AB} \cdot L_{CD} \cdot L_{EF} + \beta \cdot L_{BC} \cdot L_{DE} \cdot L_{FA} = 0$$

Para todos α e β reais, essa cúbica passa pelos 9 pontos de interseção de P e Q; em particular, passa pelos 6 pontos da cônica. Mas podemos ajustar α e β de modo que ela passe por um sétimo ponto $G = (x_G, y_G)$: basta notar que $P(x_G, y_G) = L_{AB} \cdot L_{CD} \cdot L_{EF}(x_G, y_G) \neq 0$ e $Q(x_G, y_G) = L_{BC} \cdot L_{DE} \cdot L_{FA}(x_G, y_G) \neq 0$.

Mas isso quer dizer que a cônica, que tem grau 2, e a cúbica $H(x,y) = 0$, de grau 3, têm $7 > 2 \cdot 3$ pontos de interseção. Isso só pode acontecer quando a cônica e a cúbica têm fator comum. Seja $R(x,y) = 0$ a equação da cônica. Se a cônica é irredutível (ou seja, não são duas retas), temos que $H(x,y)$ é divisível por $R(x,y)$; se a cônica é o produto de dois fatores lineares (como ocorre no teorema de Pappus), podemos escolher como sétimo ponto o ponto de interseção das duas retas (se elas forem paralelas, fazemos uma transformação projetiva para que não sejam mais); nesse caso, cada reta tem $4 > 3 \cdot 1$ pontos de interseção com a cúbica e a cúbica é divisível por cada um dos fatores lineares. Em qualquer caso, $H(x,y)$ é múltiplo de $R(x,y)$. Assim,

$$H(x,y) = R(x,y) \cdot L(x,y)$$

sendo $L(x,y)$ um fator linear. Os nove pontos de interseção de P e Q satisfazem $H(x,y) = 0$. Os três pontos P, Q e R que não satisfazem $R(x,y) = 0$ devem satisfazer $L(x,y) = 0$, o que é o mesmo que dizer que P, Q e R pertencerem à reta $L(x,y)$. ∎

4. Referências Bibliográficas

[1] Luciano Monteiro de Castro, *Introdução à Geometria Projetiva*, revista Eureka! 8. A melhor introdução à rica e interessante Geometria Projetiva.

[2] Antonio Caminha Muniz Neto, *Como Fermat e Bézout podem salvar o dia*, revista Eureka! 11. Um artigo muito interessante de Teoria dos Números.

[3] As idéias da demonstração do teorema de Bezóut foram retiradas do site

`http://www.groupsrv.com/science/about7191.html`

Esse site é um *newsgroup* e também tem um fórum. Esse tópico em particular teve a participação ilustre do matemático Joseph H. Silverman, co-autor de um livros mais interessantes sobre curvas elípticas, *Rational Points on Elliptic Curves*.

[4] As idéias da demonstração do teorema de Pascal vieram, além de conversas com o Eduardo Tengan, do site

`http://www.mathpages.com/home/kmath543/kmath543.htm`