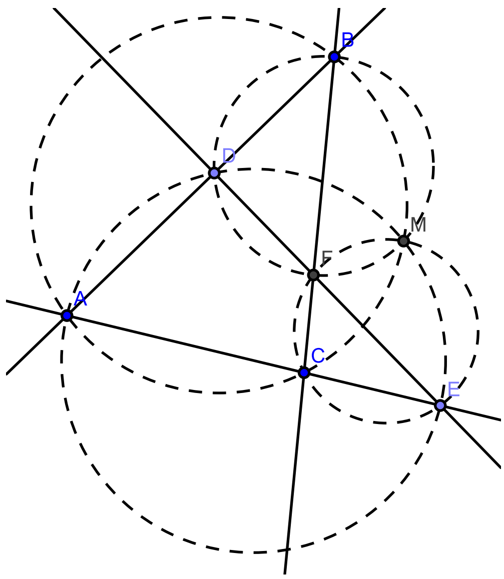
Geometria do Triângulo: fatos e problemas

Esse artigo envolve fatos não tão conhecidos sobre triângulos como o teorema de Miquel, conjugados isogonais e triângulos pedais, que são úteis em alguns problemas de Olimpíada.

1. O Teorema de Miquel

Começamos com o teorema em si, que é um dos vários pequenos milagres dos chamados *quadriláteros completos* (veja um pouco mais desses "milagres" nos exercícios!), que são os quadriláteros conhecidos unidos com as retas que contêm os lados. Isto é, um quadrilátero completo é a união de quatro *retas* em vez de quatro *segmentos*.

Teorema de Miquel. *Sejam a, b, c, d quatro retas coplanares, de modo que não há duas paralelas nem três concorrentes. Os circuncírculos dos quatro triângulos determinados pelas quatro retas passam por um mesmo ponto, denominado ponto de Miquel das quatro retas.*



Demonstração

Seja M a interseção dos circuncírculos de CEF e BDF na figura acima. Então $\angle MEA = \angle MEC = 180° - \angle MFC = \angle BFM = \angle BDM = 180° - \angle ADM$, de modo que $\angle MEA + \angle ADM = 180°$ e, portanto, $MDAE$ é inscritível. Isso quer dizer que M pertence ao circuncírculo de ADE. Analogamente, prova-se que M pertence ao circuncírculo de ABC. ∎

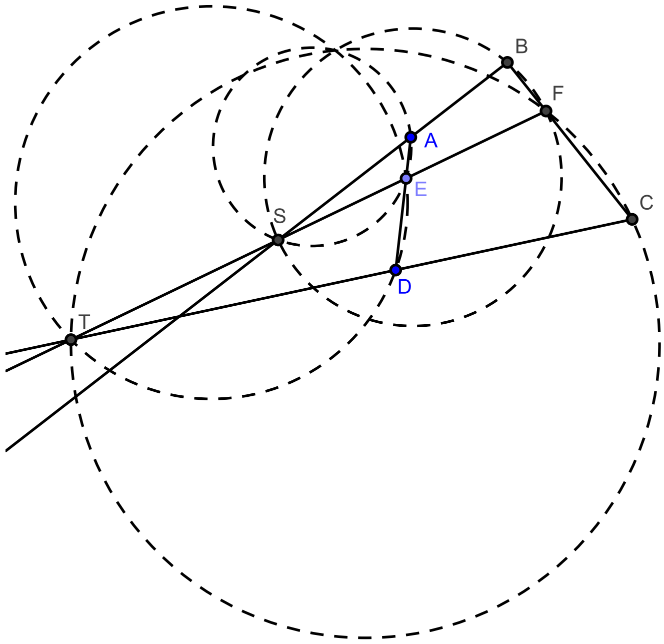
Vamos resolver, a título de exemplo, o problema 6 da olimpíada norteamericana de 2006.

Exemplo 1.1.

(USAMO 2006, Problema 6) Seja $ABCD$ um quadrilátero e E e F pontos sobre os lados AD e BC, respectivamente, tal que $AE/ED = BF/FC$. A semirreta FE corta as semirretas BA e CD em S e T, respectivamente. Prove que os circuncírculos do triângulos SAE, SBF, TCF e TDE passam por um mesmo ponto.

Resolução

Ao fazer a figura, você provavelmente vai notar uma certa semelhança com a figura anterior.



Queremos provar que os pontos de Miquel de $ADTS$ e $BCTS$ coincidem! Isso não é difícil, na verdade: seja M a interseção dos circuncírculos de SAE e SBF. Mostraremos que os circuncírculos de TED e TFC também passa por M.

Um arrastão e uma semelhança dão conta do recado: primeiro, note que $\angle AME = \angle ASE = \angle BSF = \angle BMF$ e $\angle MEA = \angle MSA = \angle MSB = \angle MFB$. Então os triângulos AME e BMF são semelhantes, e da igualdade $AE/ED = BF/FC$ os triângulos MAD e MBC são semelhantes também. Uma rápida verificação mostra que MAB e MDC também são semelhantes: de fato, $\angle AMB = \angle DMB - \angle DMA = \angle DMC + \angle CMB - \angle DMA = \angle DMC$ (pois como MAD e MBC são semelhantes então $\angle DMA = \angle CMB$) e $\frac{AM}{BM} = \frac{DM}{CM}$ (novamente da semelhança).

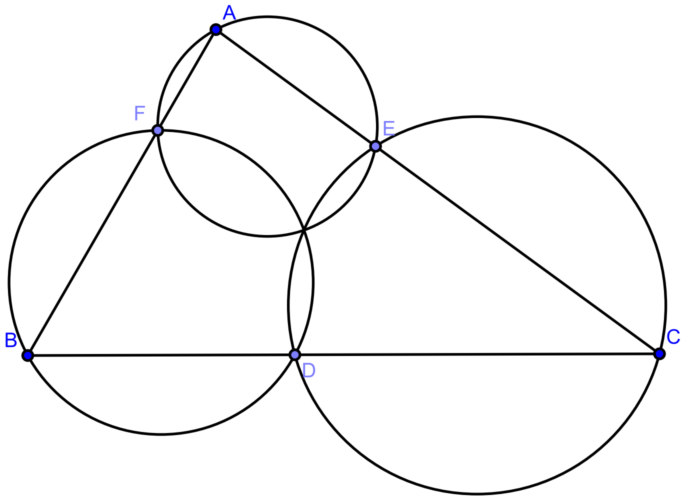
Você pode imaginar que o triângulo MAD "gira" em torno de M e, após um "acerto de escala", é transformado no triângulo MBC. Isso é uma *transformação geométrica* conhecida como *roto-homotetia* de centro M. Assim, A é levado em B e D é levado em C. Note que a semelhança obtida anteriormente envolve o centro de roto-homotetia M, os pontos e suas imagens na transformação. Isso na verdade sempre acontece (é uma das *semelhanças automáticas*).

Agora podemos terminar o problema: da semelhança entre MAB e MDC, os ângulos externos $\angle MDT$ e $\angle MAS$ são congruentes. Como M pertence ao circuncírculo de SAE, $\angle MAS = \angle MES = \angle MET$, ou seja, $\angle MDT = \angle MET$, o que significa que $MEDT$ é cíclico e, portanto, M pertence ao circuncírculo de TED. Utilizando outra semelhança automática, entre MEF e MDC (pois é, E é levado em F!), prova-se que M pertence também ao circuncírculo de TFC.

Note que se U é a interseção de AB e CD, então pelo teorema de Miquel M também pertence ao circuncírculo de STU. Então na verdade cinco círculos passam pelo ponto M! ∎

A seguinte versão do teorema de Miquel também é útil:

Teorema de Miquel para triângulos. *Seja ABC um triângulo e D, E, F pontos sobre as retas BC, CA, AB, respectivamente. Então os circuncírculos de AEF, BFD e CDE têm um ponto em comum. Esse* *ponto também é chamado de ponto de Miquel.*



Demonstração

Seja M a segunda interseção dos circuncírculos de AEF e BFD. Então $\angle CDM = \angle BFM = \angle AEM = 180° - \angle CEM$. ∎

Exercícios

01. Demonstre o teorema de Miquel para quadriláteros utilizando o teorema de Miquel para triângulos.

02. Seja $ABCDE$ um pentágono convexo e F, G, H, I, J as interseções dos prolongamentos de EA, AB, AB, BC, BC, CD, CD, DE e DE, EA, respectivamente. Prove que as segundas interseções dos circuncírculos de ABF, BCG, BCG, CDH, CDH, DEI, DEI, EAJ e EAJ, ABF pertencem a uma mesma circunferência.

03. Considere um quadrilátero completo. Seja M o seu ponto de Miquel. Prove que:

(a) os circuncentros dos quatro triângulos determinados pelo quadrilátero e M estão sobre uma mesma circunferência.

(b) as projeções ortogonais de M sobre as quatro retas do quadrilátero pertencem a uma mesma reta r; além disso, M é o único ponto do plano com essa propriedade.

(c) os ortocentros dos quatro triângulos pertencem a uma mesma reta s.

(d) as retas r e s são paralelas, e a distância de M a r é metade da distância de M a s.

04. Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo e X e Y as interseções dos lados opostos AD e BC e AB e CD, respectivamente. Prove que os pontos médios de AD, BC e XY são colineares.

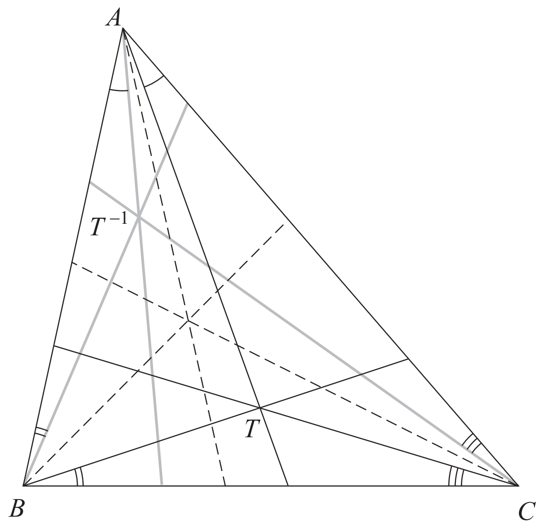
Observação: a reta que passa pelos três pontos é a reta de Gauss do quadrilátero completo.

2. Conjugados isogonais

A ideia de *conjugado* é fazer uma associação entre objetos. Objetos conjugados supostamente têm propriedades semelhantes. Isso é bastante comum em equações: se um número é raiz, então o conjugado também é raiz. Em geometria, também existe a idéia de conjugado. De fato, dado um triângulo, cada ponto tem um *conjugado isogonal* e um *conjugado isotômico*. Aqui, trataremos somente de conjugados isogonais.

Definição 2.1. *Dado um triângulo ABC, o conjugado isogonal em relação a ABC de um ponto T do plano de ABC é obtido refletindo as retas TA, TB e TC em relação às bissetrizes internas de ABC que passam por A, B e C, respectivamente. As retas resultantes são concorrentes no isogonal T^{-1} de T.*

A seguir, as linhas pontilhadas são as bissetrizes, e as cevianas cinzas são as reflexões das cevianas pretas.



O fato de que as retas isogonais são concorrentes é extremamente importante, tanto que será enunciado novamente.

Teorema fundamental dos conjugados isogonais. *Dados um triângulo e três retas que passam pelos respectivos vértices e concorrem em um ponto P, as retas isogonais a elas, obtidas através da reflexão em relação à bissetriz interna correspondente, são concorrentes no conjugado isogonal P^{-1} de P.*

Demonstração

Por que as cevianas cinzas são concorrentes? Isso decorre de duas aplicações do teorema de Ceva trigonométrico: primeiro com as cevianas concorrentes em T e depois, com as cevianas concorrentes em T^{-1}, que formam os mesmos ângulos que as outras cevianas, porém no sentido contrário. ∎

Na verdade, pode ocorrer de as três cevianas serem paralelas. Isso ocorre se, e somente se, T está sobre o circuncírculo de ABC; nesse caso, pensamos projetivamente, ou seja, o conjugado isogonal é um ponto do infinito.

2.1. Para que servem isogonais?

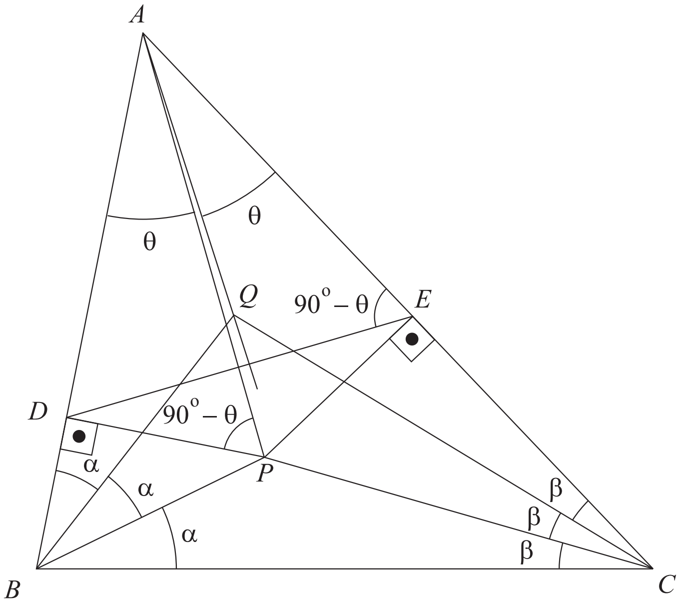
O que é mais útil em conjugados isogonais é simplesmente que as cevianas são reflexões umas das outras em relação às bissetrizes, e isso costumam levar a algumas igualdades entre ângulos um pouco mais difíceis de obter ou mesmo de se imaginar com contas.

Exemplo 2.1.

No triângulo ABC, P e Q são pontos no interior de ABC tais que $\angle CBP = \angle PBQ = \angle QBA = \angle ABC/3$ e $\angle BCP = \angle PCQ = \angle QCA = \angle ACB/3$. Sejam D e E as projeções ortogonais de P sobre AB e AC, respectivamente. Prove que AQ é perpendicular a DE.

Resolução

Seja $\theta = \angle PAD$. Então $\angle APD = 90° - \theta$ e, como $\angle ADP$ e $\angle AEP$ são retos, o quadrilátero $ADPE$ é inscritível. Logo $\angle AED = \angle APD = 90° - \theta$.



Olhando a figura, note que basta provarmos que $\angle QAC = \theta$. Aí é que entram os conjugados isogonais. Como $\angle PBC = \angle QBA$ e $\angle BCP = \angle QCA$, os pares de retas $BP; BQ$ e $CP; CQ$ são simétricos entre si em relação às bissetrizes de $\angle ABC$ e $\angle ACB$, respectivamente. Ou seja, P e Q são conjugados isogonais e, portanto, $\angle PAB$ e $\angle QAC$ também são iguais. Logo $\angle QAC = \theta$ e o ângulo entre as retas AQ e DE é $180° - \theta - (90 - \theta) = 90°$. ∎

Note que para provar o resultado na conta, bastaria repetir a demonstração do teorema fundamental dos conjugados isogonais. Mas o mais interessante é que, sabendo da existência dos conjugados isogonais, é *natural* pensar nessa solução. Em contraste, fazer a conta sem pensar em conjugados isogonais não parece ser tão natural assim. Então dá para pensar que os conjugados isogonais nos economizou não só fazer a conta, mas mostrou *onde* fazer as contas relevantes.

2.2. Conjugados isogonais dos pontos notáveis

Você já deve estar familirializado com os pontos notáveis do triângulo: o baricentro (encontro das medianas), o incentro (encontro das bissetrizes internas), o ortocentro (encontro das alturas) e o circuncentro (encontro das mediatrizes). Quais são os conjugados isogonais desses pontos? Vamos aproveitar e conhecer mais um ponto notável (mas não tão conhecido).

Vamos fazer isso em ordem de dificuldade.

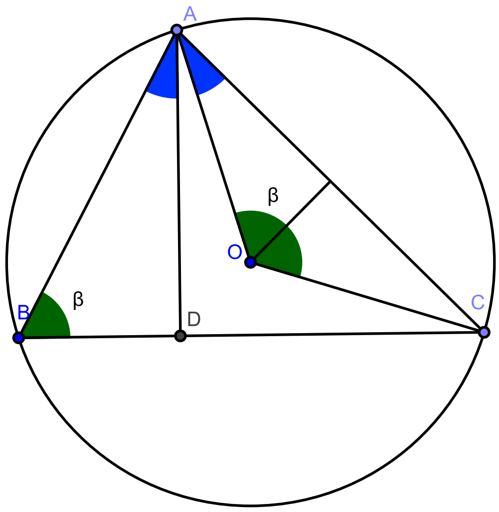
Incentro

As projeções coincidem com as próprias bissetrizes. Logo o conjugado isogonal do incentro, que é o encontro das bissetrizes internas, é ele mesmo.

O mesmo vale para os ex-incentros (encontros de duas bissetrizes externas e uma bissetriz interna e centros dos ex-incírculos, que são tangentes externamente aos lados ou seus prolongamentos). Pense sobre o assunto!

Ortocentro e circuncentro

A figura a seguir deve convencê-lo de que o ortocentro e o circuncentro são conjugados isogonais.



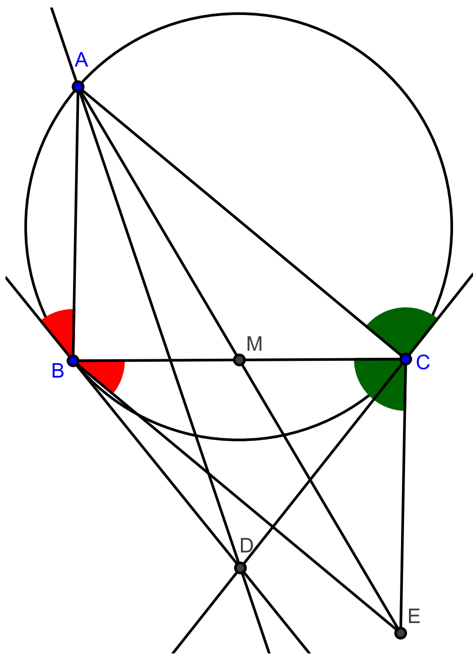
Baricentro

Os isogonais das medianas são as *simedianas* (**SI**métrico + **MEDIANA**). O ponto de encontro das simedianas é o *ponto de Lemoine*, também conhecido como *ponto simediano*. O ponto de Lemoine é costumeiramente denotado por K.

Primeiro, vamos aprender a traçá-las de modo mais prático.

Lema. *Sejam D a interseção das retas tangentes ao circuncírculo do triângulo ABC por B e C. Então a reta AD contém a simediana que passa por A.*

Demonstração



Construa o paralelogramo $ABEC$. Então AD contém a mediana AM. Afirmamos que D e E são conjugados isogonais. De fato, $\angle BCE = \angle B$ e o ângulo entre AC e CD, pela tangência, é igual a $\angle B$. Assim, as retas CD e CE são conjugadas isogonais. Analogamente, BD e BE também são, e o resultado segue do teorema fundamental dos conjugados isogonais. ∎

Exercícios

05. Sejam P e Q pontos no interior do ângulo $\angle BAC$ tais que $BP = CP$, $BQ = CQ$ e $\angle ABP + \angle ACQ = 180°$. Prove that $\angle BAP = \angle CAQ$.

06. As retas obtidas através das reflexões da diagonal BD do quadrilátero $ABCD$ em relação às bissetrizes de $\angle B$ e $\angle D$ passam pelo ponto médio de AC. Prove que as reflexões da diagonal AC do quadrilátero $ABCD$ em relação às bissetrizes de $\angle A$ e $\angle C$ passam pelo ponto médio de BD.

07. (Prova de Seleção EUA, 2008) Seja ABC um triângulo e G o seu baricentro. O ponto P varia sobre o segmento BC. Os pontos Q e R pertencem aos lados AC e AB respectivamente, e são tais que PQ é paralelo a AB e PR é paralelo a AC. Prove que, ao variar P sobre BC, o circuncírculo de AQR passa por um ponto fixado X tal que $\angle BAG = \angle CAX$.

08. (IMO 2004, Problema 5) Num quadrilátero convexo $ABCD$ a diagonal BD não é bissetriz do ângulo $\angle ABC$ nem do ângulo $\angle CDA$. Um ponto P no interior de $ABCD$ satisfaz

$$\angle PBC = \angle DBA \quad \text{e} \quad \angle PDC = \angle BDA.$$

Prove que os vértices do quadrilátero $ABCD$ pertencem a uma mesma circunferência se, e somente se, $AP = CP$.

3. Triângulo pedal

Definição 3.1. *Seja P um ponto no plano do triângulo ABC e D, E e F as projeções de P sobre as retas BC, CA e AB. O triângulo DEF é o triângulo pedal de P em relação ao triângulo ABC.*

O que triângulos pedais têm de especial? Primeiro, aparecem muitos ângulos retos, o que propicia o aparecimento de quadriláteros inscritíveis. Segundo, eles normalmente minimizam áreas.

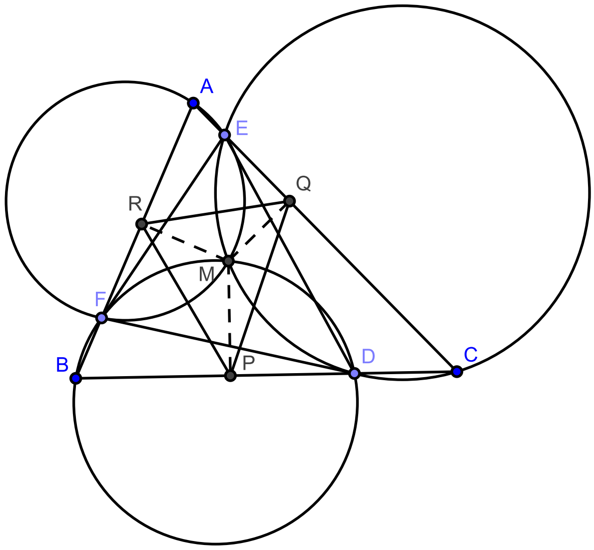
Teorema do mínimo. *Dado um triângulo T, considere todos os triângulos DEF semelhantes a T, todos na mesma ordem, com D sobre o lado BC, E sobre o lado CA e F sobre o lado AB. Dentre todos esses triângulos, o de menor área é o triângulo pedal de algum ponto P.*

Demonstração

Não provaremos aqui a existência de um triângulo de área mínima (caso você esteja curioso, estude topologia e depois volte!).

Seja DEF o triângulo de área mínima. Seja M o ponto de Miquel de ABC e DEF, e sejam P, Q e R

as projeções de M sobre os lados.



Note que o quadrilátero $CPMQ$ é inscritível (pois $\angle MPC$ e $\angle MQC$ são retos), de modo que $\angle DME = \angle PMQ = 180° - \angle C$. Portanto, $\angle PMD = \angle QME$: imagine o ângulo $\angle DME$ girando em torno de M para coincidir com $\angle PMQ$; MD vira MP e ME vira MQ. Analogamente, $\angle RMF = \angle QME$.

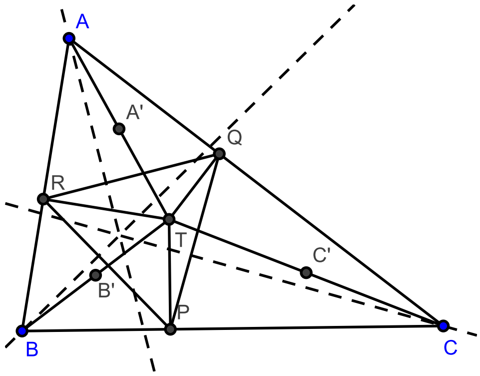
Portanto os triângulos PMD, QME e RMF são semelhantes e induzem uma roto-homotetia (você se lembra o que é isso?) que leva DEF a PQR. A razão de homotetia é $\frac{MP}{MD} \le 1$, de modo que a área de PQR é menor ou igual à área de DEF. Como DEF tem área mínima, os triângulos devem ser consgruentes e deste modo $MP = MD$, ou seja, $P = D$. Analogamente, $Q = E$ e $R = F$, de modo que DEF é o triângulo pedal de P. ∎

Exemplo 3.1.

(Prova de Seleção EUA, 2008) Sejam P, Q, R pontos sobre os lados BC, CA, AB de um triângulo acutângulo ABC tais que PQR é equilátero e tem área mínima entre todos tais triângulos equiláteros. Prove que a reta perpendicular a QR que passa por A, a reta perpendicular a RP que passa por B e a reta perpendicular a PQ que passa por C têm um ponto comum.

Resolução

Pelo teorema do mínimo, PQR é triângulo pedal de algum ponto T.



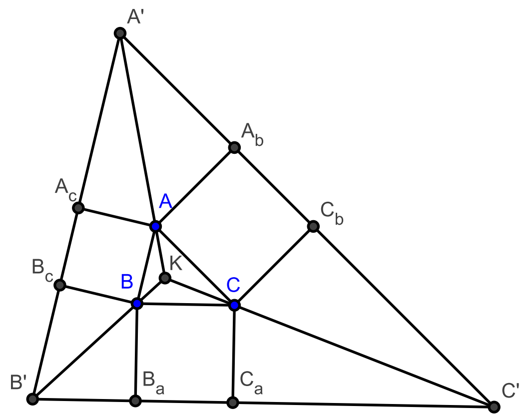
Como os ângulos $\angle TQA$ e $\angle TRA$ são ambos retos, o quadrilátero $AQTR$ é inscritível, e o seu circuncentro é o ponto médio A' de AT. Assim, a reta perpendicular a QR e que passa por A, que contém a altura relativa a QR, é isogonal a AT, que contém o circuncentro, em relação ao triângulo AQR. Como os ângulos $\angle BAC$ e $\angle QAR$ são iguais, a perpendicular e AT são isogonais em relação ao triângulo ABC também. O análogo para as perpendiculares a PR por B e a PQ por C. Como AT, BT e CT são concorrentes em T, seus isogonais são concorrentes no conjugado isogonal de T.

A título de curiosidade, o ponto T é o *primeiro ponto isodinâmico*. Os dois pontos isodinâmicos (adivinhe o nome do outro ponto!) são os pontos de interseção dos *círculos de Apolônio* de A, B e C (que passam pelos vértices, o pé da bissetriz interna e têm centro sobre o lado oposto). Os seus conjugados isogonais são os *pontos de Fermat*. O primeiro ponto de Fermat é o ponto cuja soma das distâncias aos vértices é mínima (supondo que os ângulos internos do triângulos são todos menores do que 120°). Veja [5] para aprender isso e muito, muito mais. ∎

3.1. Voltando às simedianas

Uma aplicação interessante da ideia de triângulo pedal está relacionado às simedianas. Uma outra maneira de construir as simedianas é a seguinte:

Lema. *Construa quadrados ABB_cA_c, BCC_aB_a e CAA_bC_b externamente sobre os lados do triângulo ABC. Prolongue A_cB_c, B_aC_a e C_bA_b para obter o triângulo $A'B'C'$. Então as retas AA', BB' e CC' concorrem no ponto simediano K de ABC.*



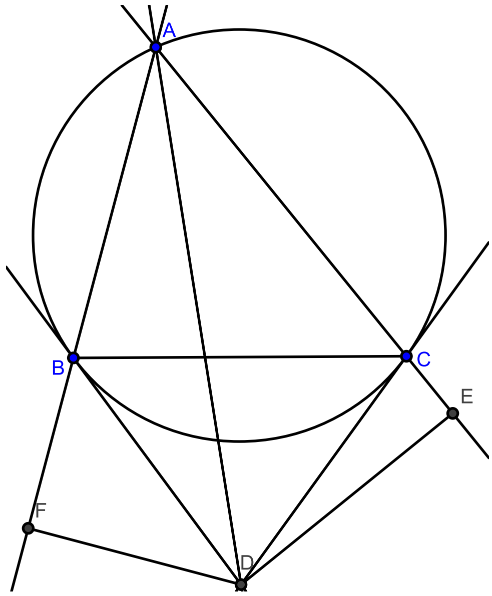
Demonstração

Por simplicidade, sejam $BC = a$, $CA = b$ e $AB = c$ e L o encontro de AA', BB', CC'. Queremos provar que $L = K$.

Primeiro, como os pares de retas $AB; A'B'$, $BC; B'C'$ e $CA; C'A'$ são paralelos, os triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes. Seja k a razão de semelhança. Sejam k_a, k_b e k_c as distâncias de K a BC, CA e AB, respectivamente. Das semelhanças entre $KAB; KA'B'$, $KBC; KB'C'$ e $KCA; KC'A'$, todas de razão k,

$$\frac{k_a}{k_a + a} = \frac{k_b}{k_b + b} = \frac{k_c}{k_c + c} = k \iff \frac{k_a}{a} = \frac{k_b}{b} = \frac{k_c}{c} = \frac{k}{1-k}$$

Isto quer dizer que as distâncias de L a cada um dos lados é proporcional aos seus comprimentos. Além disso, considerando uma semelhança prova-se que um ponto X pertence a, digamos, AL se, e somente, as distâncias de X aos lados AB e AC são proporcionais a seus comprimentos. Basta provar que a simediana por A tem a mesma propriedade. Para isso, considere a construção anterior, sendo D o mesmo ponto definido anteriormente.

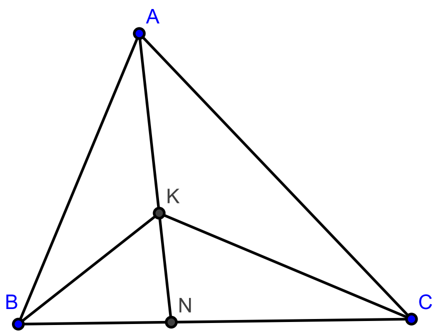


Sendo x e y as distâncias de D a AB e AC, respectivamente, considerando que o ângulo entre AB e BD é $\angle FBD = \angle ACB = \angle C$ e o ângulo entre AC e CD é $\angle DCE = \angle ABC = \angle B$ (não se preocupe com triângulos obtusângulo; nesse caso, troque o ângulo obtuso por seu suplementar), nos triângulos retângulos BDF e CDE, $x = BD \operatorname{sen} \angle C$ e $y = DC \operatorname{sen} \angle B$. Observando ainda que, sendo DB e DC tangentes, $DB = DC$, temos $\frac{x}{y} = \frac{\operatorname{sen} \angle C}{\operatorname{sen} \angle B} = \frac{AB}{AC}$. Logo D pertence a AL e, consequentemente, K também. Da mesma forma provamos que K pertence a BL e CL, de modo que $L = K$. ∎

Assim como no teorema das bissetrizes, as simedianas dividem os lados opostos em razões interessantes.

Lema. *Seja ABC um triângulo e AN uma simediana. Então* $\frac{BN}{CN} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$.

Demonstração



Já provamos anteriormente que as distâncias do ponto simediano K aos lados são proporcionais a seus comprimentos. Então existe t real tal que $k_a = ta$, $k_b = tb$ e $k_c = tc$. Assim, as áreas de KAB, KAC e KBC são $\frac{tc \cdot c}{2} = \frac{tc^2}{2}$, $\frac{tb \cdot b}{2} = \frac{tb^2}{2}$ e $\frac{ta \cdot a}{2} = \frac{ta^2}{2}$, respectivamente. Logo

$$\frac{BN}{CN} = \frac{\text{área}\, ABN}{\text{área}\, ACN} = \frac{\text{área}\, KBN}{\text{área}\, KCN} = \frac{\text{área}\, ABN - \text{área}\, KBN}{\text{área}\, ACN - \text{área}\, KCN} = \frac{\text{área}\, KAB}{\text{área}\, KAC} = \frac{c^2}{b^2} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$$

∎

Isso pode ser generalizado:

Lema. *Sejam d_a, d_b e d_c as distâncias de um ponto P aos lados BC, CA e AB do triângulo ABC. Se AP corta BC em N, então $\frac{BN}{CN} = \frac{c \cdot d_c}{b \cdot d_b}$.*

Demonstração

Fica a cargo do leitor. ∎

3.2. A desigualdade de Erdős-Mordell

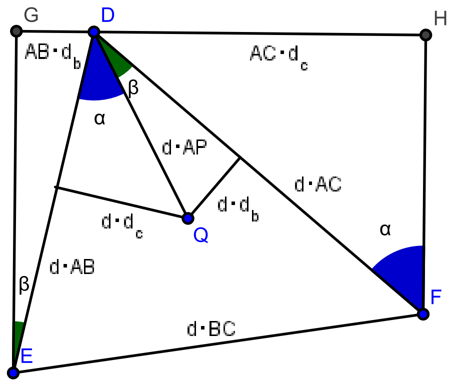
Um dos principais teoremas sobre triângulos pedais é a *desigualdade de Erdős-Mordell*:

Desigualdade de Erdős-Mordell. *Seja P um ponto no plano do triângulo ABC e d_a, d_b, d_c as distâncias de P às retas BC, CA, AB respectivamente. Então*

$$PA + PB + PC \geq 2(d_a + d_b + d_c)$$

Demonstração

Seja $PA = d$. "Multiplique" a figura original por d e construa triângulos semelhantes aos triângulos obtidos por PA e as projeções de P sobre AB e AC:



Note que $\angle GDE = 90° - \beta$ e $\angle HDF = 90° - \alpha$, de modo que G, D e H são colineares. Além disso, $\angle EGD$ e $\angle EHD$ são ambos retos, de modo que as retas EG e FH são paralelas. A distância entre essas duas retas é $GH = AB \cdot d_b + AC \cdot d_c$, que é menor ou igual a $EF = d \cdot BC$. Lembrando que $d = PA$, temos $AB \cdot d_b + AC \cdot d_c \leq PA \cdot BC \iff PA \geq \frac{AB}{BC} \cdot d_b + \frac{AC}{BC} \cdot d_c$. Analogamente,

$$PA \geq \frac{AB}{BC} \cdot d_b + \frac{AC}{BC} \cdot d_c$$
$$PB \geq \frac{AB}{AC} \cdot d_a + \frac{BC}{AC} \cdot d_c$$
$$PC \geq \frac{AC}{AB} \cdot d_a + \frac{BC}{AB} \cdot d_b$$

Somando as três equações e lembrando que $t + \frac{1}{t} \geq 2$ para todo t real positivo,

$$PA + PB + PC \geq \left(\frac{AB}{AC} + \frac{AC}{AB}\right) d_a + \left(\frac{AB}{BC} + \frac{BC}{AB}\right) d_b + \left(\frac{AC}{BC} + \frac{BC}{AC}\right) d_c \geq 2(d_a + d_b + d_c)$$

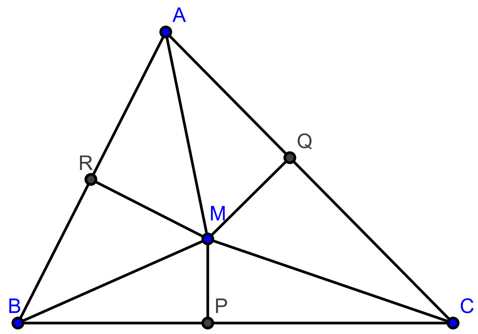
∎

Exemplo 3.2.

(IMO 1991, Problema 4) Sejam ABC um triângulo e M um ponto interior. Mostre que pelo menos um dos ângulos $\angle MAB$, $\angle MBC$ e $\angle MCA$ é menor ou igual a $30°$.

Resolução

Sejam P, Q e R as projeções de M sobre BC, CA e AB, respectivamente.



Pela desigualdade de Erdős-Mordell, $MA+MB+MC \geq 2(MP+MQ+MR)$. Se todas as razões $\frac{MR}{MA}$, $\frac{MP}{MB}$, $\frac{MQ}{MC}$ são maiores do que $\frac{1}{2}$, então $MA < 2MR$, $MB < 2MP$ e $MC < 2MQ$, e $MA + MB + MC < 2(MP + MQ + MR)$, contradição. Então uma das razões, digamos, $\frac{MR}{MA}$, é menor ou igual a $\frac{1}{2}$. Todavia, $\frac{MR}{MA} = \operatorname{sen} \angle MAB$, de modo que $\angle MAB \leq 30°$.

Exercícios

09. Dado um triângulo com perímetro L, seja P o perímetro de um triângulo pedal. Prove que $L \geq 2P$. Quando ocorre a igualdade?

10. Seja P um ponto interior ao triângulo ABC e T o seu triângulo pedal. Prove que a área de T é igual a $\frac{R^2-OP^2}{4R^2}$ vezes a área de ABC.

11. Seja G o baricentro do triângulo ABC e D, E, F as projeções ortogonais de G sobre os lados BC, CA e AB, respectivamente. Prove que

$$\frac{4}{27} < \frac{\text{área}\, DEF}{\text{área}\, ABC} \leq \frac{1}{4}$$

12. Seja P um ponto qualquer no plano do triângulo ABC. As projeções de P sobre BC, CA, AB são D, E e F respectivamente.

(a) Prove que as perpendiculares a EF, FD, DE por A, B, C respectivamente têm um ponto P' em comum.

(b) Sejam Q e Q' as segundas interseções de AP e AP' com o circuncírculo de ABC, respectivamente. Prove que as retas QQ' e BC são paralelas.

13. Os pontos X, Y e Z estão sobre BC, CA e AB do triângulo ABC, respectivamente, e são tais que XYZ e ABC são semelhantes, nessa ordem. Prove que o circuncentro de XYZ é equidistante aos ortocentros de ABC e XYZ.

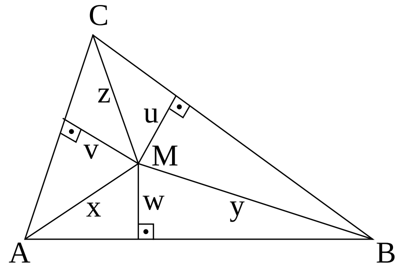
14. (Ibero 2008, Problema 5) Seja ABC um triângulo e X, Y, Z pontos interiores dos lados BC, AC, AB, respectivamente. Sejam A', B', C' os circuncentros dos triângulos AZY, BXZ, CYX, respectivamente. Demonstre que

$$(A'B'C') \geq \frac{(ABC)}{4}$$

e que a igualdade ocorre se, e somente se, as retas AA', BB', CC' têm um ponto em comum.

Observação: Para um triângulo qualquer RST, denotamos a sua área por (RST).

15. (OPM, 2001)



(a) Na figura acima, considere pontos B_1 e C_1 sobre as semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, respectivamente.

(i) Mostre que a soma das áreas dos paralelogramos com lados AB_1 e AM e com lados AC_1 e AM é igual à área do paralelogramo tal que um de seus lados é B_1C_1 e o outro é paralelo a AM.

(ii) Tomando $AB_1 = AC$ e $AC_1 = AB$, conclua que $AB \cdot v + AC \cdot w \leq BC \cdot x$

(b) Prove a *Desigualdade de Erdős-Mordell*: $2(u + v + w) \leq x + y + z$

4. Referências Bibliográficas

[1] Uma ótima fonte de problemas é o Mathlinks: `http://www.mathlinks.ro/` (em inglês).

[2] Para quem gosta de Geometria, o *Forum Geometricorum* é um prato cheio! Tudo sobre quadriláteros completos foi retirado do artigo *Steiner's Theorems on The Complete Quadrilateral*, de Jean-Pierre Ehrmann, Volume 4 (2004), pp 35–52.

[3] Para quem quer saber mais sobre o teorema de Erdős-Mordell (e ver ainda mais uma demonstração!), veja o artigo de Anderson Torres, *A Desigualdade de Erdős-Mordell*, na Eureka! 18.

[4] O livro *Modern Geometry of the Triangle*, de William Gallatly, contém muita informação interessante, incluindo a maior parte dos fatos sobre simedianas e o ponto simediano.

[5] Mais conjugados isogonais? Isso e muito mais no livro *Geometry of Conics* (o "livro do bode" – veja a capa!), de A. V. Akopyan e A. A. Zaslavsky.