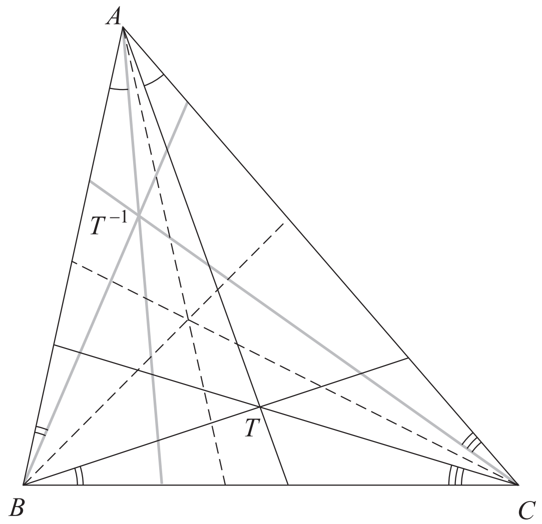
Conjugados isogonais e simedianas

1. Conjugados isogonais

A ideia de *conjugado* é fazer uma associação entre objetos. Objetos conjugados supostamente têm propriedades semelhantes. Isso é bastante comum em equações: se um número é raiz, então o conjugado também é raiz. Em geometria, também existe a idéia de conjugado. De fato, dado um triângulo, cada ponto tem um *conjugado isogonal* e um *conjugado isotômico*. Aqui, trataremos somente de conjugados isogonais.

Definição 1.1. *Dado um triângulo ABC, o conjugado isogonal em relação a ABC de um ponto T do plano de ABC é obtido refletindo as retas TA, TB e TC em relação às bissetrizes internas de ABC que passam por A, B e C, respectivamente. As retas resultantes são concorrentes no isogonal T^{-1} de T.*

A seguir, as linhas pontilhadas são as bissetrizes, e as cevianas cinzas são as reflexões das cevianas pretas.



O fato de que as retas isogonais são concorrentes é extremamente importante, tanto que será enunciado novamente.

Teorema fundamental dos conjugados isogonais. *Dados um triângulo e três retas que passam pelos respectivos vértices e concorrem em um ponto P, as retas isogonais a elas, obtidas através da reflexão em relação à bissetriz interna correspondente, são concorrentes no conjugado isogonal P^{-1} de P.*

Demonstração

Por que as cevianas cinzas são concorrentes? Isso decorre de duas aplicações do teorema de Ceva trigonométrico: primeiro com as cevianas concorrentes em T e depois, com as cevianas concorrentes em T^{-1}, que formam os mesmos ângulos que as outras cevianas, porém no sentido contrário. ∎

Na verdade, pode ocorrer de as três cevianas serem paralelas. Isso ocorre se, e somente se, T está sobre o circuncírculo de ABC; nesse caso, pensamos projetivamente, ou seja, o conjugado isogonal é um ponto do infinito.

1.1. Para que servem isogonais?

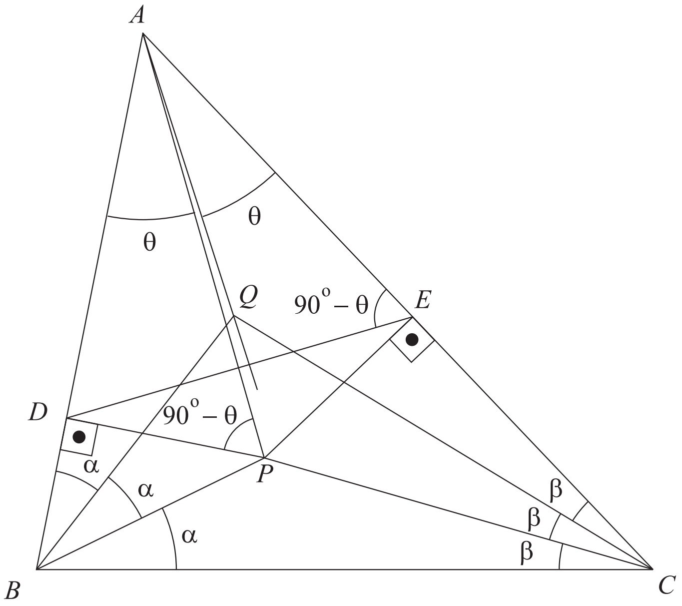
O que é mais útil em conjugados isogonais é simplesmente que as cevianas são reflexões umas das outras em relação às bissetrizes, e isso costumam levar a algumas igualdades entre ângulos um pouco mais difíceis de obter ou mesmo de se imaginar com contas.

Exemplo 1.1.

No triângulo ABC, P e Q são pontos no interior de ABC tais que $\angle CBP = \angle PBQ = \angle QBA = \angle ABC/3$ e $\angle BCP = \angle PCQ = \angle QCA = \angle ACB/3$. Sejam D e E as projeções ortogonais de P sobre AB e AC, respectivamente. Prove que AQ é perpendicular a DE.

Resolução

Seja $\theta = \angle PAD$. Então $\angle APD = 90^\circ - \theta$ e, como $\angle ADP$ e $\angle AEP$ são retos, o quadrilátero $ADPE$ é inscritível. Logo $\angle AED = \angle APD = 90^\circ - \theta$.



Olhando a figura, note que basta provarmos que $\angle QAC = \theta$. Aí é que entram os conjugados isogonais. Como $\angle PBC = \angle QBA$ e $\angle BCP = \angle QCA$, os pares de retas $BP; BQ$ e $CP; CQ$ são simétricos entre si em relação às bissetrizes de $\angle ABC$ e $\angle ACB$, respectivamente. Ou seja, P e Q são conjugados isogonais e, portanto, $\angle PAB$ e $\angle QAC$ também são iguais. Logo $\angle QAC = \theta$ e o ângulo entre as retas AQ e DE é $180^\circ - \theta - (90 - \theta) = 90^\circ$. ∎

Note que para provar o resultado na conta, bastaria repetir a demonstração do teorema fundamental dos conjugados isogonais. Mas o mais interessante é que, sabendo da existência dos conjugados isogonais, é *natural* pensar nessa solução. Em contraste, fazer a conta sem pensar em conjugados isogonais não parece ser tão natural assim. Então dá para pensar que os conjugados isogonais nos economizou não só fazer a conta, mas mostrou *onde* fazer as contas relevantes.

1.2. Conjugados isogonais dos pontos notáveis

Você já deve estar familirializado com os pontos notáveis do triângulo: o baricentro (encontro das medianas), o incentro (encontro das bissetrizes internas), o ortocentro (encontro das alturas) e o circuncentro (encontro das mediatrizes). Quais são os conjugados isogonais desses pontos? Vamos aproveitar e conhecer mais um ponto notável (mas não tão conhecido).

Vamos fazer isso em ordem de dificuldade.

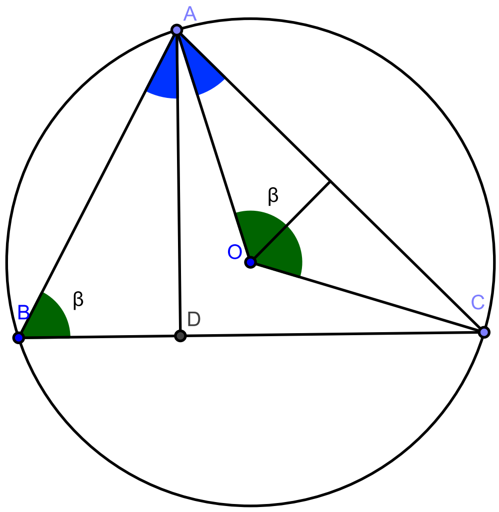
Incentro

As projeções coincidem com as próprias bissetrizes. Logo o conjugado isogonal do incentro, que é o encontro das bissetrizes internas, é ele mesmo.

O mesmo vale para os ex-incentros (encontros de duas bissetrizes externas e uma bissetriz interna e centros dos ex-incírculos, que são tangentes externamente aos lados ou seus prolongamentos). Pense sobre o assunto!

Ortocentro e circuncentro

A figura a seguir deve convencê-lo de que o ortocentro e o circuncentro são conjugados isogonais.



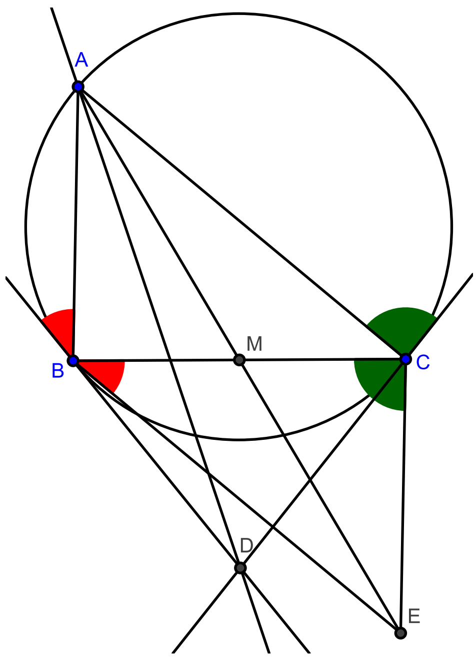
Baricentro

Os isogonais das medianas são as *simedianas* (**SI**métrico + **MEDIANA**). O ponto de encontro das simedianas é o *ponto de Lemoine*, também conhecido como *ponto simediano*. O ponto de Lemoine é costumeiramente denotado por K.

Primeiro, vamos aprender a traçá-las de modo mais prático.

Lema. *Sejam D a interseção das retas tangentes ao circuncírculo do triângulo ABC por B e C. Então a reta AD contém a simediana que passa por A.*

Demonstração



Construa o paralelogramo $ABEC$. Então AD contém a mediana AM. Afirmamos que D e E são conjugados isogonais. De fato, $\angle BCE = \angle B$ e o ângulo entre AC e CD, pela tangência, é igual a $\angle B$. Assim, as retas CD e CE são conjugadas isogonais. Analogamente, BD e BE também são, e o resultado segue do teorema fundamental dos conjugados isogonais. ∎

2. Triângulo pedal

Definição 2.1. *Seja P um ponto no plano do triângulo ABC e D, E e F as projeções de P sobre as retas BC, CA e AB. O triângulo DEF é o triângulo pedal de P em relação ao triângulo ABC.*

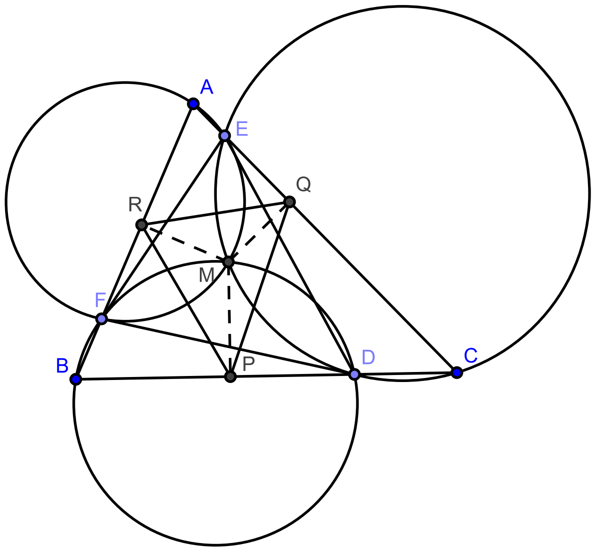
O que triângulos pedais têm de especial? Primeiro, aparecem muitos ângulos retos, o que propicia o aparecimento de quadriláteros inscritíveis. Segundo, eles normalmente minimizam áreas.

Teorema do mínimo. *Dado um triângulo T, considere todos os triângulos DEF semelhantes a T, todos na mesma ordem, com D sobre o lado BC, E sobre o lado CA e F sobre o lado AB. Dentre todos esses triângulos, o de menor área é o triângulo pedal de algum ponto P.*

Demonstração

Não provaremos aqui a existência de um triângulo de área mínima (caso você esteja curioso, estude topologia e depois volte!).

Seja DEF o triângulo de área mínima. Seja M o ponto de Miquel de ABC e DEF, e sejam P, Q e R as projeções de M sobre os lados.



Note que o quadrilátero $CPMQ$ é inscritível (pois $\angle MPC$ e $\angle MQC$ são retos), de modo que $\angle DME = \angle PMQ = 180° - \angle C$. Portanto, $\angle PMD = \angle QME$: imagine o ângulo $\angle DME$ girando em torno de M para coincidir com $\angle PMQ$; MD vira MP e ME vira MQ. Analogamente, $\angle RMF = \angle QME$.

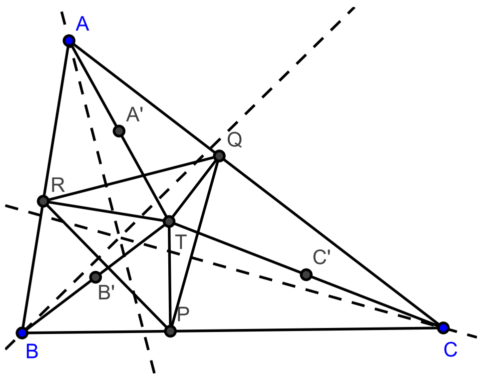
Portanto os triângulos PMD, QME e RMF são semelhantes e induzem uma roto-homotetia (você se lembra o que é isso?) que leva DEF a PQR. A razão de homotetia é $\frac{MP}{MD} \leq 1$, de modo que a área de PQR é menor ou igual à área de DEF. Como DEF tem área mínima, os triângulos devem ser congruentes e deste modo $MP = MD$, ou seja, $P = D$. Analogamente, $Q = E$ e $R = F$, de modo que DEF é o triângulo pedal de P. ∎

Exemplo 2.1.

(Prova de Seleção EUA, 2008) Sejam P, Q, R pontos sobre os lados BC, CA, AB de um triângulo acutângulo ABC tais que PQR é equilátero e tem área mínima entre todos tais triângulos equiláteros. Prove que a reta perpendicular a QR que passa por A, a reta perpendicular a RP que passa por B e a reta perpendicular a PQ que passa por C têm um ponto comum.

Resolução

Pelo teorema do mínimo, PQR é triângulo pedal de algum ponto T.



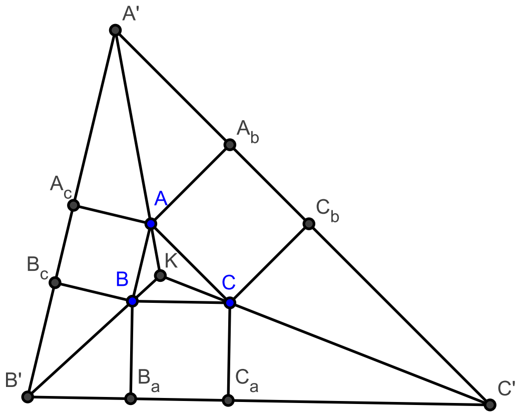
Como os ângulos $\angle TQA$ e $\angle TRA$ são ambos retos, o quadrilátero $AQTR$ é inscritível, e o seu circuncentro é o ponto médio A' de AT. Assim, a reta perpendicular a QR e que passa por A, que contém a altura relativa a QR, é isogonal a AT, que contém o circuncentro, em relação ao triângulo AQR. Como os ângulos $\angle BAC$ e $\angle QAR$ são iguais, a perpendicular e AT são isogonais em relação ao triângulo ABC também. O análogo para as perpendiculares a PR por B e a PQ por C. Como AT, BT e CT são concorrentes em T, seus isogonais são concorrentes no conjugado isogonal de T.

A título de curiosidade, o ponto T é o *primeiro ponto isodinâmico*. Os dois pontos isodinâmicos (adivinhe o nome do outro ponto!) são os pontos de interseção dos *círculos de Apolônio* de A, B e C (que passam pelos vértices, o pé da bissetriz interna e têm centro sobre o lado oposto). Os seus conjugados isogonais são os *pontos de Fermat*. O primeiro ponto de Fermat é o ponto cuja soma das distâncias aos vértices é mínima (supondo que os ângulos internos do triângulos são todos menores do que 120°). Veja [5] para aprender isso e muito, muito mais. ∎

2.1. Voltando às simedianas

Uma aplicação interessante da ideia de triângulo pedal está relacionado às simedianas. Uma outra maneira de construir as simedianas é a seguinte:

Lema. *Construa quadrados ABB_cA_c, BCC_aB_a e CAA_bC_b externamente sobre os lados do triângulo ABC. Prolongue A_cB_c, B_aC_a e C_bA_b para obter o triângulo $A'B'C'$. Então as retas AA', BB' e CC' concorrem* *no ponto simediano K de ABC.*



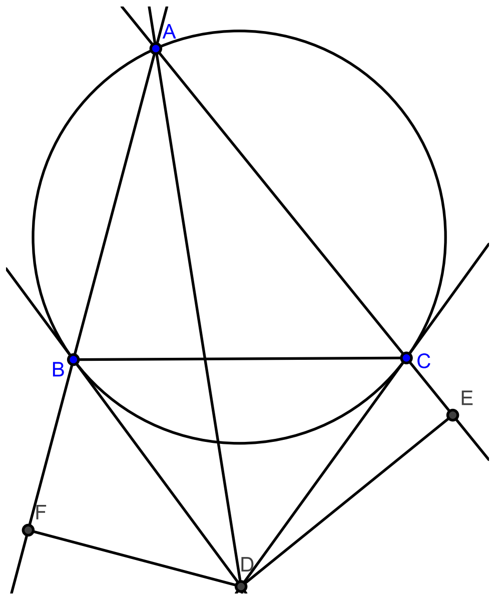
Demonstração

Por simplicidade, sejam $BC = a$, $CA = b$ e $AB = c$ e L o encontro de AA', BB', CC'. Queremos provar que $L = K$.

Primeiro, como os pares de retas $AB; A'B'$, $BC; B'C'$ e $CA; C'A'$ são paralelos, os triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes. Seja k a razão de semelhança. Sejam k_a, k_b e k_c as distâncias de K a BC, CA e AB, respectivamente. Das semelhanças entre $KAB; KA'B'$, $KBC; KB'C'$ e $KCA; KC'A'$, todas de razão k,

$$\frac{k_a}{k_a + a} = \frac{k_b}{k_b + b} = \frac{k_c}{k_c + c} = k \iff \frac{k_a}{a} = \frac{k_b}{b} = \frac{k_c}{c} = \frac{k}{1 - k}$$

Isto quer dizer que as distâncias de L a cada um dos lados é proporcional aos seus comprimentos. Além disso, considerando uma semelhança prova-se que um ponto X pertence a, digamos, AL se, e somente, as distâncias de X aos lados AB e AC são proporcionais a seus comprimentos. Basta provar que a simediana por A tem a mesma propriedade. Para isso, considere a construção anterior, sendo D o mesmo ponto definido anteriormente.

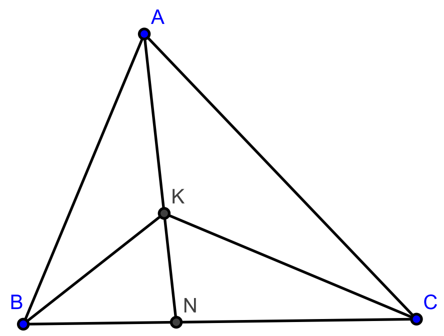


Sendo x e y as distâncias de D a AB e AC, respectivamente, considerando que o ângulo entre AB e BD é $\angle FBD = \angle ACB = \angle C$ e o ângulo entre AC e CD é $\angle DCE = \angle ABC = \angle B$ (não se preocupe com triângulos obtusângulo; nesse caso, troque o ângulo obtuso por seu suplementar), nos triângulos retângulos BDF e CDE, $x = BD \operatorname{sen} \angle C$ e $y = DC \operatorname{sen} \angle B$. Observando ainda que, sendo DB e DC tangentes, $DB = DC$, temos $\frac{x}{y} = \frac{\operatorname{sen} \angle C}{\operatorname{sen} \angle B} = \frac{AB}{AC}$. Logo D pertence a AL e, consequentemente, K também. Da mesma forma provamos que K pertence a BL e CL, de modo que $L = K$. ∎

Assim como no teorema das bissetrizes, as simedianas dividem os lados opostos em razões interessantes.

Lema. *Seja ABC um triângulo e AN uma simediana. Então $\frac{BN}{CN} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$.*

Demonstração



Já provamos anteriormente que as distâncias do ponto simediano K aos lados são proporcionais a seus comprimentos. Então existe t real tal que $k_a = ta$, $k_b = tb$ e $k_c = tc$. Assim, as áreas de KAB, KAC e KBC são $\frac{tc \cdot c}{2} = \frac{tc^2}{2}$, $\frac{tb \cdot b}{2} = \frac{tb^2}{2}$ e $\frac{ta \cdot a}{2} = \frac{ta^2}{2}$, respectivamente. Logo

$$\frac{BN}{CN} = \frac{\text{área}\, ABN}{\text{área}\, ACN} = \frac{\text{área}\, KBN}{\text{área}\, KCN} = \frac{\text{área}\, ABN - \text{área}\, KBN}{\text{área}\, ACN - \text{área}\, KCN} = \frac{\text{área}\, KAB}{\text{área}\, KAC} = \frac{c^2}{b^2} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$$

∎

Isso pode ser generalizado:

Lema. *Sejam d_a, d_b e d_c as distâncias de um ponto P aos lados BC, CA e AB do triângulo ABC. Se AP corta BC em N, então $\frac{BN}{CN} = \frac{c \cdot d_c}{b \cdot d_b}$.*

Demonstração

Fica a cargo do leitor. ∎

Exercícios

01. Sejam BD e CE alturas do triângulo ABC. As retas tangentes ao circuncírculo de ABC em B e C cortam-se em T. Prove que a reta AT bissecta DE.

02. (Ibero 2007, Problema 2) Seja ABC um triângulo de incentro I. O círculo Γ tem centro em I, raio maior do que o inraio de ABC e não passa por nenhum vértice de ABC. Seja X_1 a interseção de Γ com AB mais próxima de B; X_2 e X_3 as interseções de Γ com BC, com X_2 mais próximo de B; X_4 a interseção de Γ com AC mais próxima de C. Finalmente, seja K a interseção de X_1X_2 e X_3X_4. Prove que AK bissecta o segmento X_2X_3.

03. Sejam P e Q pontos no interior do ângulo $\angle BAC$ tais que $BP = CP$, $BQ = CQ$ e $\angle ABP + \angle ACQ = 180°$. Prove that $\angle BAP = \angle CAQ$.

04. As retas obtidas através das reflexões da diagonal BD do quadrilátero $ABCD$ em relação às bissetrizes de $\angle B$ e $\angle D$ passam pelo ponto médio de AC. Prove que as reflexões da diagonal AC do quadrilátero $ABCD$ em relação às bissetrizes de $\angle A$ e $\angle C$ passam pelo ponto médio de BD.

05. (Prova de Seleção EUA, 2008) Seja ABC um triângulo e G o seu baricentro. O ponto P varia sobre o segmento BC. Os pontos Q e R pertencem aos lados AC e AB respectivamente, e são tais que PQ é paralelo a AB e PR é paralelo a AC. Prove que, ao variar P sobre BC, o circuncírculo de AQR passa por um ponto fixado X tal que $\angle BAG = \angle CAX$.

06. (IMO 2004, Problema 5) Num quadrilátero convexo $ABCD$ a diagonal BD não é bissetriz do ângulo $\angle ABC$ nem do ângulo $\angle CDA$. Um ponto P no interior de $ABCD$ satisfaz

$$\angle PBC = \angle DBA \quad \text{e} \quad \angle PDC = \angle BDA.$$

Prove que os vértices do quadrilátero $ABCD$ pertencem a uma mesma circunferência se, e somente se, $AP = CP$.

07. (USAMO 2008, Problema 2) Seja ABC um triângulo acutângulo e escaleno. Os pontos M, N, P são os pontos médios de BC, CA e AB, respectivamente. As mediatrizes de AB e AC cortam a semirreta AM em D e E, respectivamente. As retas BD e CE cortam-se em F, que é interior ao triângulo ABC. Prove que os pontos A, N, F, P estão sobre uma mesma circunferência.

08. (Cone Sul 2009, Problema 3) Sejam A, B e C três pontos tais que B é ponto médio do segmento AC e seja P um ponto tal que $\angle PBC = 60°$. São construídos o triângulo equilátero PCQ tal que B e Q estão em semiplanos diferentes em relação a PC, e o triângulo equilátero APR tal que B e R estão no mesmo semiplano em relação a AP. Seja X o ponto de interseção das retas BQ e PC; seja Y o ponto de interseção das retas BR e AP. Demonstre que XY e AC são paralelos.

3. Referências Bibliográficas

[1] Uma ótima fonte de problemas é o Mathlinks: `http://www.mathlinks.ro/` (em inglês).

[2] O livro *Modern Geometry of the Triangle*, de William Gallatly, contém muita informação interessante, incluindo a maior parte dos fatos sobre simedianas e o ponto simediano.

[3] Mais conjugados isogonais? Isso e muito mais no livro *Geometry of Conics* (o "livro do bode" – veja a capa!), de A. V. Akopyan e A. A. Zaslavsky.