Quarta Lista de Preparação para a LVIII IMO
e XXVII Olimpíada Iberoamericana de Matemática
Nível III

Prazo: 31/03/2017, 23:59 de Brasília

Álgebra

PROBLEMA 1
Sejam n e k inteiros positivos com $k \leq n-2$. O valor absoluto da soma de quaisquer k dos n números reais $a_1, a_2, \ldots, a_n$ é menor ou igual a 1. Sabendo que $|a_1| \geq 1$, prove que, para $2 \leq i \leq n$,

$$|a_1| + |a_i| \leq 2.$$

PROBLEMA 2
Um número n é *saboroso* se existem $2n$ números reais $x_1, \ldots, x_{2n}$, não todos iguais, tais que a soma de quaisquer n dos números é igual ao produto dos outros n números. Encontre todos os números saborosos.

PROBLEMA 3
Encontre o maior valor real de c para o qual existe um polinômio P não constante tal que

$$P(x^2) = P(x-c)P(x+c)$$

para todo x real.

Combinatória

PROBLEMA 4
Recortaldo corta, de um tabuleiro 100×100, 1950 retângulos 1×2, sempre cortando exatamente nas linhas do tabuleiro. Prove é possível cortar um T-tetraminó (uma peça formada por uma casa e três casas vizinhas a essa casa) do que sobrou do tabuleiro.

PROBLEMA 5
Um bazar tem uma máquina, o *mudador de carpetes*. Ele pega um carpete de dimensões $a \times b$ e devolve um carpete de dimensões $\frac{1}{a} \times \frac{1}{b}$ ou dois carpetes de dimensões $c \times b$ e $\frac{a}{c} \times b$, em que c pode ser escolhido. É possível, a partir de um carpete com ambas as dimensões maiores do que 1, obter, através de uma quantidade finita de operações na máquina, um conjunto de carpetes, cada um com uma dimensão maior do que 1 e a outra dimensão menor do que 1?

PROBLEMA 6
Há n pontos azuis e n pontos vermelhos na borda de um círculo. Um par de pontos, um de cada cor, é *equilibrado* se pelo menos um dos dois arcos ligando os dois pontos tem a mesma quantidade de pontos azuis e vermelhos. Em particular, dois pontos vizinhos de cores diferentes são equilibradas. Sabe-se que existe um ponto vermelho em exatamente 10 pares equilibrados. Prove que existe um ponto azul em exatamente 10 pares equilibrados.

Geometria

PROBLEMA 7
Seja ω um círculo de diâmetro OI. Construa uma função bijetora $f\colon \omega \setminus \{I, O\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ com a seguinte propriedade: para todos pontos distintos A, B, C, D diferentes de O e I, $f(A)f(B) = f(C)f(D)$ se, e somente se, AB, CD e OI têm um ponto em comum ou são paralelos.

PROBLEMA 8
Seja ω o incírculo de ABC ($AB < AC$). O A-excírculo ω_A é tangente a BC em D. Um ponto variável X é escolhido sobre o segmento AD de modo que DX não tem pontos em comum com ω. As retas tangentes a ω que passam por X cortam o lado BC em Y e Z. Prove que $XY + XZ$ não depende da escolha de X.

PROBLEMA 9
As áreas dos retângulos P e Q são iguais, mas a diagonal de P é maior do que a diagonal de Q. O retângulo Q pode ser coberto por duas cópias de P. Prove que P pode ser coberto por duas cópias de Q.

Teoria dos Números

PROBLEMA 10
Encontre todos os polinômios P, com coeficientes inteiros, tais que n divide $P(2^n)$ para todo inteiro positivo n.

PROBLEMA 11
Seja $n > 1$ inteiro e $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n$ todos os seus divisores positivos. Encontre todos os valores de n para os quais
$$\mathrm{mdc}(d_1, d_2) + \mathrm{mdc}(d_2, d_3) + \cdots + \mathrm{mdc}(d_{k-1}, d_k) = n - 2.$$

PROBLEMA 12
Determine se existe um inteiro positivo a tais que $x^2 + 3$ e $(x + a)^2 + 3$ são primos entre si para todo inteiro positivo x.

Problemas gerais

PROBLEMA 13
Determine se existem dois conjuntos infinitos S e T de inteiros positivos tais que todo inteiro positivo n pode ser escrito unicamente na forma
$$n = s_1t_1 + s_2t_2 + \cdots + s_kt_k$$
em que k pode mudar para cada valor de n, $s_1 < s_2 < \ldots < s_k$ pertencem a S e $t_1, t_2, \ldots, t_k$ pertencem a T. Note que $t_1, t_2, \ldots, t_k$ não são necessariamente distintos nem ordenados.

PROBLEMA 14
Encontre todas as funções f dos reais positivos nos reais positivos tais que, para a, b, c reais positivos distintos quaisquer, a, b, c podem ser lados de um triângulo se, e somente se, $f(a), f(b), f(c)$ podem ser lados de um triângulo.

PROBLEMA 15
Seja $n \geq 2$. Defina
$$X = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_k \in \{0, 1, 2, \ldots, k\}, k = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Para quaisquer dois elementos $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ e $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ de X, defina
$$s \vee t = (\max\{s_1, t_1\}, \max\{s_2, t_2\}, \ldots, \max\{s_n, t_n\})$$
$$s \wedge t = (\min\{s_1, t_1\}, \min\{s_2, t_2\}, \ldots, \min\{s_n, t_n\}).$$

Encontre o maior valor de $|A|$, $A \subset X$ e $A \neq X$, tais que, para quaisquer $s, t \in A$, $s \vee t \in A$ e $s \wedge t \in A$.

PROBLEMA 16
O quadrilátero convexo $ABCD$ é cíclico e admite uma circunferência Γ que tangencia as semirretas AB, BC, AD, DC em X, Y, Z, T, respectivamente, de modo que os pontos de tangência não pertencem aos lados (ou seja, Γ é uma espécie de excírculo). Seja P a interseção das diagonais AC e BD. O círculo Ω passa por A e B e é tangente externamente a Γ em S. Prove que $SP \perp ST$.