Quarta Lista de Preparação para a LVIII IMO
e XXVII Olimpíada Iberoamericana de Matemática
Nível III
Soluções

Prazo: 31/03/2017, 23:59 de Brasília

Álgebra

PROBLEMA 1
Sejam n e k inteiros positivos com $k \leq n-2$. O valor absoluto da soma de quaisquer k dos n números reais $a_1, a_2, \ldots, a_n$ é menor ou igual a 1. Sabendo que $|a_1| \geq 1$, prove que, para $2 \leq i \leq n$,

$$|a_1| + |a_i| \leq 2.$$

Solução
Podemos supor sem perdas que $a_1 \geq 1$ (caso contrário, trocamos os sinais de todos os números). Agora suponha também que $a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq a_j > 0 \geq a_{j+1} \geq \ldots a_n$. Temos $a_1 + a_2 + \cdots + a_i > 1$ para $2 \leq i \leq j$, então $j < k$. Como $k \leq n-2$, há pelo menos dois números negativos.

Vamos provar que $a_1 - a_n \leq 2$. Como $|a_n|$ é o maior entre os negativos, isso resolve o problema para a_i negativo. Mas isso vem de $a_1 + a_{n-k+1} + \cdots + a_{n-1} \leq 1$ e $a_{n-k+1} + a_{n-k+2} + \cdots + a_n \geq -1 \iff -a_{n-k+1} - a_{n-k+2} - \cdots - a_n \leq 1$, e somamos as duas desigualdades.

Se só a_1 é positivo, é só provarmos que $a_1 - a_n \leq 2$, o que já foi feito. Se mais de um número é positivo, basta provarmos que $a_1 + a_2 \leq 2$, já que a_2 é o maior positivo, tirando possivelmente a_1. Mas isso vem de $a_1 + a_2 + a_{n-k+1} + \cdots + a_{n-2} \leq 1$ e $a_{n-k+1} + \cdots + a_n \geq -1$, o que implica $a_1 + a_2 - a_{n-1} - a_n \leq 2$. Como $-a_{n-1}$ e $-a_n$ são positivos (há pelo menos dois negativos), o resultado segue.

PROBLEMA 2
Um número n é *saboroso* se existem $2n$ números reais $x_1, \ldots, x_{2n}$, não todos iguais, tais que a soma de quaisquer n dos números é igual ao produto dos outros n números. Encontre todos os números saborosos.

Solução
Resposta: n par.

Suponha, sem perdas, que $x_1 \neq x_2$. Então $x_1x_3x_4 \ldots x_{n+1} = x_2 + x_{n+2} + \cdots + x_{2n}$ e $x_2x_3x_4 \ldots x_{n+1} = x_1 + x_{n+2} + \cdots + x_{2n}$. Subtraindo encontramos $x_3x_4 \ldots x_{n+1}(x_1 - x_2) = x_2 - x_1$, ou seja, $x_3x_4 \ldots x_{n+1} = -1$. Podemos escolher quaisquer $n-1$ índices, então $x_3 = x_4 = \cdots = x_{2n} = x$ e $x^{n-1} = -1$, o que só é possível se n é par e $x = -1$.

Para n par, basta tomar $x_1 = n$ e $x_2 = x_3 = \cdots = x_{2n} = -1$. O produto é 1 se só escolhemos -1 para o produto, e a soma é $n + (n-1)(-1) = 1$; se escolhemos n para o produto, ele é igual a $-n$ e a soma é $n(-1) = -n$.

PROBLEMA 3
Encontre o maior valor real de c para o qual existe um polinômio P não constante tal que

$$P(x^2) = P(x-c)P(x+c)$$

para todo x real.

Solução
Resposta: $1/2$.

Seja r uma raiz. Então, fazendo $x \to r \pm c$, temos que $(r-c)^2$ e $(r+c)^2$ são raízes. Se $|r| < |r-c|^2$, então iterar a função $r \to (r-c)^2$ aumenta o módulo das raízes, e conseguimos uma sequência infinita de raízes, absurdo. Analogamente não podemos ter $|r| < |r-c|^2$, de modo que $|r| = |r-c|^2$. Do mesmo modo, $|r| = |r+c|^2$ e

$$2|r| = |r-c|^2 + |r+c|^2 = (r\overline{r} - rc - \overline{r}c + c^2) + (r\overline{r} + rc + \overline{r}c + c^2) = 2|r|^2 + 2c^2.$$

Logo $|r|^2 - |r| + c^2 = 0 \iff |r| = \frac{1 \pm \sqrt{1-4c^2}}{2}$ e logo $1 - 4c^2 \geq 0 \implies c \leq 1/2$.

Vejamos se existe um polinômio para $c = 1/2$. Para ocorrer $|r + 1/2| = |r - 1/2|$, devemos ter r na mediatriz de $1/2$ e $-1/2$, que é o eixo imaginário. Logo, observando que $1 - 4c^2 = 0$, $r = \pm i/2$. De fato, $P(x) = x^2 + 1/4$ funciona: $P(x-1/2)P(x+1/2) = ((x-1/2)^2 + 1/4)((x+1/2)^2 + 1/4) = (x^2 + 1/2)^2 - x^2 = x^4 + 1/4 = P(x^2)$.

Combinatória

PROBLEMA 4
Recortaldo corta, de um tabuleiro 100×100, 1950 retângulos 1×2, sempre cortando exatamente nas linhas do tabuleiro. Prove é possível cortar um T-tetraminó (uma peça formada por uma casa e três casas vizinhas a essa casa) do que sobrou do tabuleiro.

Solução
Suponha que os dominós são recortados em alguma ordem. Defina o *preço* de uma casa não recortada como a quantidade de vizinhos não recortados, menos 2. Queremos que, após 1950 cortes, sobre pelo menos uma casa com preço positivo, que vai ser o centro do T-tetraminó desejado (essa casa vai ter pelo menos três casas vizinhas não recortadas).

O preço total inicial é $98^2 \cdot 2 + 98 \cdot 4 \cdot 1 = 98(196 + 4) = 19600$. Cada corte tira duas casas, e cada uma é vizinha de quatro outras, dando um total de no máximo 10 a menos de preço (pode ser que alguns vizinhos já estão recortados). Com isso, o preço total após 1950 cortes é pelo menos $19600 - 1950 \cdot 10 = 100$, completando a demonstração.

PROBLEMA 5
Um bazar tem uma máquina, o *mudador de carpetes*. Ele pega um carpete de dimensões $a \times b$ e devolve um carpete de dimensões $\frac{1}{a} \times \frac{1}{b}$ ou dois carpetes de dimensões $c \times b$ e $\frac{a}{c} \times b$, em que c pode ser escolhido. É possível, a partir de um carpete com ambas as dimensões maiores do que 1, obter, através de uma quantidade finita de operações na máquina, um conjunto de carpetes, cada um com uma dimensão maior do que 1 e a outra dimensão menor do que 1?

Solução
Resposta: não.

Diremos que um carpete é *grande* quando ambas suas dimensões são maiores do que 1 e é *pequeno* quando ambas suas dimensões são menores do que 1. Provaremos que a quantidade total de carpetes pequenos e grandes não diminui, o que nos prova que a resposta do problema é negativa.

De fato, se não fazemos a operação em um carpete grande ou pequeno, a quantidade não diminui; a primeira operação transforma um carpete grande em um pequeno e vice-versa, não alterando o total. Consideremos a segunda operação. Se o carpete é grande, devemos ter $c < 1$, mas aí $\frac{a}{c} > 1$, e um dos carpetes é grande; se é pequeno, então $c > 1$ e $\frac{a}{c} < 1$, e um dos carpetes é pequeno, completando a demonstração.

PROBLEMA 6
Há n pontos azuis e n pontos vermelhos na borda de um círculo. Um par de pontos, um de cada cor, é *equilibrado* se pelo menos um dos dois arcos ligando os dois pontos tem a mesma quantidade de pontos azuis e vermelhos. Em particular, dois pontos vizinhos de cores diferentes são equilibradas. Sabe-se que existe um ponto vermelho em exatamente 10 pares equilibrados. Prove que existe um ponto azul em exatamente 10 pares equilibrados.

Solução
Seja P um ponto vermelho que está em exatamente 10 pares equilibrados. Sejam $P_1, P_2, \ldots, P_{2n}$ o pontos no sentido horário, com $P_1 = P$, e veja os índices módulo $2n$. Seja d_i a diferença entre a quantidade de pontos vermelhos e azuis, nessa ordem, entre os pontos $P_1, P_2, \ldots, P_i$; d_i pode ser negativo e, em particular, $d_1 = 1$ e $d_{2n} = 0$. Agora, o par de pontos $\{P, P_i\}$ é equilibrado quando $d_i = 0$, e sendo P_i azul, $d_{i-1} = 1$. Note que há exatamente 10 "descidas" $d_{i-1} = 1 \to 0 = d_i$, e podemos fazer isso ciclicamente também (ou seja, ver os índices de d_i módulo $2n$ também).

Como $d_{2n} = 0$, a quantidade de "subidas" $d_{j-1} = 0 \to d_j = 1$, $j = 1, 2, \ldots, 2n$, também é 10. Um jeito de verificar isso é ligar os pontos (i, d_i) e $(i + 1, d_{i+1})$; esses segmentos têm coeficientes angulares ± 1; as descidas correspondem a ir do semiplano $y \ge 1/2$ para o semiplano $y \le 1/2$, e como $d_{2n} = 0$ e temos uma linha contínua, temos que ter a mesma quantidade de cruzamentos com a reta $y = 1/2$. Além disso, P_j é vermelho.

Agora, seja P_i um dos 10 pontos azuis com $d_i = 0$. Quando $\{P_i, P_j\}$ é equilibrado? Entre 1 e i há a mesma quantidade de pontos de cada cor; entre i e j também deve haver essa mesma quantidade, contando i e j; parece que $d_j = 0$, mas o ponto P_i está sendo contado duas vezes, ou seja, há um ponto vermelho a mais. Assim, $\{P_i, P_j\}$ é equilibrado se, e somente se, $d_j = 1$ e P_j é vermelho, ou seja, $d_{j-1} = 0$. Mas isso corresponde à subidas, e provamos que há exatamente 10 subidas; portanto cada um desses pontos azuis P_i está em exatamente 10 pares equilibrados, e o problema acabou.

Geometria

PROBLEMA 7
Seja ω um círculo de diâmetro OI. Construa uma função bijetora $f\colon \omega \setminus \{I, O\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ com a seguinte propriedade: para todos pontos distintos A, B, C, D diferentes de O e I, $f(A)f(B) = f(C)f(D)$ se, e somente se, AB, CD e OI têm um ponto em comum ou são paralelos.

Solução

Considerando que ω é o círculo unitário de centro $K = 0$ no plano complexo com O em -1 e I em 1, a corda AB é dada por $z + \overline{z}ab = a + b$, cuja interseção com OI, o eixo dos reais, é tal que $z = \overline{z} \iff z = \frac{a+b}{1+ab}$, com $AB \parallel OI$ quando $ab = -1$. Com isso, AB e CD se cortam sobre OI ou são ambos paralelos a OI se, e somente se,

$$(a + b) : (1 + ab) = (c + d) : (1 + cd).$$

Agora, sendo $a = \alpha^2$, $b = \beta^2$, $c = \gamma^2$ e $d = \delta^2$, temos, dividindo a primeira proporção por $\alpha\beta$,

$$\begin{aligned}
&(a + b) : (1 + ab)\\
&= (\alpha/\beta + \beta/\alpha) : (\alpha\beta + \overline{\alpha\beta})\\
&= \Re(\alpha/\beta) : \Re(\alpha\beta) = \cos\frac{\angle OKA - \angle OKB}{2} : \cos\frac{\angle OKA + \angle OKB}{2}\\
&= \left(\cos\frac{\angle OKA}{2}\cos\frac{\angle OKB}{2} + \operatorname{sen}\frac{\angle OKA}{2}\operatorname{sen}\frac{\angle OKB}{2}\right) : \left(\cos\frac{\angle OKA}{2}\cos\frac{\angle OKB}{2} - \operatorname{sen}\frac{\angle OKA}{2}\operatorname{sen}\frac{\angle OKB}{2}\right)\\
&= (1 + \tan\angle OIA \tan\angle OIB) : (1 - \tan\angle OIA \tan\angle OIB).
\end{aligned}$$

Então, AB e CD se cortam sobre OI ou são ambos paralelos a OI se, e somente se,

$$(1+\tan\angle OIA\tan\angle OIB) : (1-\tan\angle OIA\tan\angle OIB) = (1+\tan\angle OIC\tan\angle OID) : (1-\tan\angle OIC\tan\angle OID)$$

$$\iff (1+\tan\angle OIA\tan\angle OIB) : (1+\tan\angle OIC\tan\angle OID) = (1-\tan\angle OIA\tan\angle OIB) : (1-\tan\angle OIC\tan\angle OID).$$

Considerando que $x : y = z : w = (x + z) : (y + w) = (x - z) : (y - w)$, obtemos

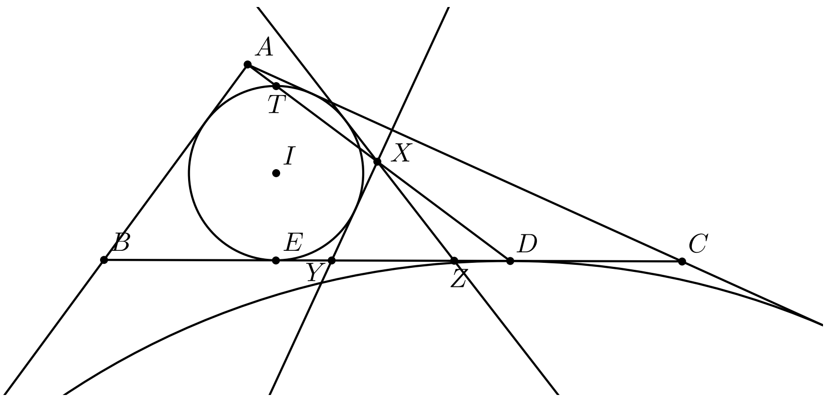
$$2 : 2 = 2\tan\angle OIA\tan\angle OIB : 2\tan\angle OIC\tan\angle OID \iff \tan\angle OIA\tan\angle OIB = \tan\angle OIC\tan\angle OID,$$

e podemos tomar $f(X) = \tan\angle OIX$, com $\angle OIX$ orientado (se IO, IX estão no sentido anti-horário, $\angle OIX > 0$; caso contrário, $\angle OIX < 0$). Como $\angle OIX$ assume cada valor de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\}$ exatamente uma vez, a imagem de f é $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e f é injetora; ou seja, f é bijetora.

PROBLEMA 8

Seja ω o incírculo de ABC ($AB < AC$). O A-excírculo ω_A é tangente a BC em D. Um ponto variável X é escolhido sobre o segmento AD de modo que DX não tem pontos em comum com ω. As retas tangentes a ω que passam por X cortam o lado BC em Y e Z. Prove que $XY + XZ$ não depende da escolha de X.

Solução



Primeiro note que ω é o Z-exincírculo de XYZ. É bem conhecido que T, a interseção de AD e ω mais próxima de A, é o ponto diametralmente oposto ao ponto de tangência E de ω em BC. Além disso, a homotetia que leva ω ao Y-exincírculo ω_X de XYZ tem centro X e leva a tangente a ω por T, que é paralela a BC à tangente a ω_X por uma reta paralela a BC, ou seja, a própria reta BC. Com isso, T é levado a D, e portanto ω_X tangencia BC em D.

Portanto $YD = ZE = p_{XYZ} = \frac{XY+XZ+YZ}{2}$, de modo que $DE = YD + ZE - YZ = XY + XZ$. Como D e E não dependem de X, o problema está resolvido.

PROBLEMA 9

As áreas dos retângulos P e Q são iguais, mas a diagonal de P é maior do que a diagonal de Q. O retângulo Q pode ser coberto por duas cópias de P. Prove que P pode ser coberto por duas cópias de Q.

Solução
Por conveniência, suponha sem perdas que em cada retângulo a largura é menor ou igual ao comprimento. Como, fixado $xy = k$, $x^2 + y^2 = x^2 + k^2/x^2$ é decrescente para $x \le \sqrt{P}$, a largura de P é menor do que a largura de Q, e o comprimento de P é maior do que o comprimento de Q. Se duas cópias de P cobrem Q, então essas cópias cobrem o círculo de diâmetro igual à largura de Q, e portanto a largura de P é maior ou igual à metade da largura de Q. Mas isso quer dizer que o comprimento de Q é maior ou igual à metade do comprimento de P, e podemos cobrir Q com duas cópias de Q.

Teoria dos Números

PROBLEMA 10
Encontre todos os polinômios P, com coeficientes inteiros, tais que n divide $P(2^n)$ para todo inteiro positivo n.

Solução
Resposta: somente o polinômio nulo.

Como $2^{pk} \equiv 2^k \pmod{p}$ e, para todo polinômio P de coeficientes inteiros e a e B inteiros, $a - b \mid P(a) - P(b)$, $p \mid 2^{kp} - 2^k \mid P(2^{kp}) - P(2^k)$. Mas $p \mid kp \mid P(2^{kp})$, logo $p \mid P(2^k)$ para todo primo p, ou seja, $P(2^k) = 0$ para todo inteiro positivo k. Logo P tem infinitas raízes, e só pode ser o polinômio nulo.

PROBLEMA 11
Seja $n > 1$ inteiro e $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n$ todos os seus divisores positivos. Encontre todos os valores de n para os quais

$$\mathrm{mdc}(d_1, d_2) + \mathrm{mdc}(d_2, d_3) + \cdots + \mathrm{mdc}(d_{k-1}, d_k) = n - 2.$$

Solução
Resposta: $n = 3$ é a única solução.

Primeiro, veja que $\mathrm{mdc}(d_{i-1}, d_i) \le d_i - d_{i-1}$. Note que se somarmos essas desigualdades obtemos $\mathrm{mdc}(d_1, d_2) + \cdots + \mathrm{mdc}(d_{k-1}, d_k) \le d_k - d_1 = n - 1$, ou seja, a igualdade acima é bem apertada! De fato, devemos ter $\mathrm{mdc}(d_{i-1}, d_i) = d_i - d_{i-1}$ para todo i exceto um, $i = t$, para o qual $\mathrm{mdc}(d_{t-1}, d_t) = d_t - d_{t-1} - 1$. Nesse caso, esse mdc só pode ser 1, pois ele divide d_t, d_{t-1} e $d_t - d_{t-1} - 1$. Com isso, $d_t - d_{t-1} = 2$, ou seja, d_{t-1} e d_t são ímpares consecutivos.

Agora considere $d_m = n/d_t$, de modo que $d_{m+1} = n/d_{t-1}$. Temos $d_{m+1} - d_m = \frac{n}{d_t d_{t-1}}(d_t - d_{t-1})$, e temos $n = d_t d_{t-1}$. Logo n é ímpar e não podemos ter $\mathrm{mdc}(d_i - d_{i-1}) = d_i - d_{i-1}$, pois $d_i - d_{i-1}$ é par. Com isso, $k = 2$, n é primo, $d_1 = 1$ e $n = d_2 = 1 + 2 = 3$. Pode-se verificar que $n = 3$ dá certo.

PROBLEMA 12
Determine se existe um inteiro positivo a tais que $x^2 + 3$ e $(x + a)^2 + 3$ são primos entre si para todo inteiro positivo x.

Solução
Resposta: não.

Primeiro note que a deve ser ímpar, já que se x é ímpar então $x^2 + 3$ é par e $(x + a)^2 + 3$ deve ser ímpar, ou seja, $x + a$ é par.

Vamos encontrar um primo p que divide $x^2 + 3$ e $(x + a)^2 + 3$ para algum x. Então p divide $(x + a)^2 + 3 - (x^2 + 3) = a(2x + a)$. Vamos fazer com que p divida $2x + a$. Logo

$$2x \equiv -a \pmod{p} \implies 4(x^2 + 3) \equiv a^2 + 12 \pmod{p}.$$

Assim, p deve dividir $a^2 + 12$. Escolha então p como um fator primo qualquer de $a^2 + 12$. Como a é ímpar, p é ímpar também. Agora é só fazer conta para ver que dá para voltar os passos: escolha x inteiro positivo tal que $2x + a \equiv 0 \pmod{p}$. Então

$$4(x^2 + 3) \equiv a^2 + 12 \equiv 0 \pmod{p}$$
$$4((x + a)^2 + 3) \equiv (2a + 2x)^2 + 12 \equiv a^2 + 12 \equiv 0 \pmod{p},$$

e portanto não existe a nas condições do enunciado.

Problemas gerais

PROBLEMA 13
Determine se existem dois conjuntos infinitos S e T de inteiros positivos tais que todo inteiro positivo n pode ser escrito unicamente na forma

$$n = s_1 t_1 + s_2 t_2 + \cdots + s_k t_k$$

em que k pode mudar para cada valor de n, $s_1 < s_2 < \ldots < s_k$ pertencem a S e $t_1, t_2, \ldots, t_k$ pertencem a T. Note que $t_1, t_2, \ldots, t_k$ não são necessariamente distintos nem ordenados.

Solução

Resposta: sim.

Dizemos que um par de conjuntos *finitos* (S, T) é N-*cobertor* se todo inteiro positivo n com $n < N$ pode ser escrito unicamente na forma

$$n = s_1t_1 + s_2t_2 + \cdots + s_kt_k,$$

e todo número que pode ser expresso nessa forma é menor do que N. Se um par de conjuntos é N-cobertor para algum N, diremos simplesmente que ele é *cobertor*.

Vamos construir duas sequências $(S_0, S_1, \ldots)$ e $(T_0, T_1, \ldots)$ de conjuntos tais que $S_i \subseteq S_{i+1}$ e $T_i \subseteq T_{i+1}$ para todo i inteiro não negativo e (S_i, T_i) e (S_i, T_{i+1}) são cobertores de números cada vez maiores; com isso, $S = \bigcup_{i\geq 0} S_i$ e $T = \bigcup_{i\geq 0} T_i \setminus \{0\}$ são a solução do problema, já que para todo m inteiro existe N tal que $m < N$ e (S_i, T_i) é N-cobertor.

Começamos com $S_0 = \{1\}$ e $T_0 = \{0, 1\}$, de modo que (S_0, T_0) é 2-cobertor. Agora, dado um par (S, T) que é N-cobertor, vamos construir dois pares (S', T) e (S, T') que são N^2-cobertores com $S \subseteq S'$ e $T \subseteq T'$. Por exemplo, podemos tomar

$$S' = S \cup \{xN : x \in S\}, \quad T' = \{Nx + y : x, y \in T\}.$$

Todo número $m < N^2$ pode ser escrito de forma única como $pN + q$, $0 \leq p < N$ e $0 \leq q < N$; tomando as representações $p = s_1t_1 + \cdots + s_kt_k$ e $q = s_1u_1 + s_2u_2 + \cdots + s_ku_k$ (em que $s_i \in S$, $t_i, u_i \in T$ e tomamos alguns $t_i = 0$ ou $u_i = 0$ para ajeitar os índices dos s_i's), obtemos uma representação única como $\sum s_i(Nt_i + u_i)$, $s_i \in S$ e $Nt_i + u_i \in T'$ e uma representação única como $\sum s_iu_i + \sum(Ns_i)t_i$, $s_i, Ns_i \in S'$ (veja que $1 \in S \implies 1 \in S'$) e $t_i \in T$. Como p e q nunca ultrapassam N nas representações, $m = Np + q \leq N(N-1) + N - 1 < N^2$.

Agora podemos construir a sequência com as seguintes operações: $(S_0, T_0) \to (S_0, T_1) \to (S_1, T_1) \to \ldots \to (S_i, T_i) \to (S_i, T_{i+1}) \to (S_{i+1}, T_{i+1}) \to \ldots$, concluindo a demonstração.

PROBLEMA 14

Encontre todas as funções f dos reais positivos nos reais positivos tais que, para a, b, c reais positivos distintos quaisquer, a, b, c podem ser lados de um triângulo se, e somente se, $f(a), f(b), f(c)$ podem ser lados de um triângulo.

Solução

Seja a um real positivo qualquer. Se para algum $x > 1$ temos $f(xa) > f(a)$ ou $f((x+1)a) > f(a)$ então, sabendo que $a, xa, (x+1)a$ não são lados de triângulo, $f(a) \leq |f((x+1)a) - f(xa)|$. Tomando b tal que $xa, (x+1)a, b$ são lados de um triângulo, ou seja, $a = (x+1)a - xa < b < (x+1)a + xa = (2x+1)a$, temos $f(b) > |f((x+1)a) - f(xa)| \geq f(a) \implies f(a) < f(b)$ para todo b no intervalo $]a, (2x+1)a[$.

Seja $n > 2$ um natural. Suponha que a condição de cima não acontece para $x = n$ e para $x = n + \frac{1}{2}$, ou seja, $f(na), f((n+1)a) < f(a)$ e $f((n+\frac{1}{2})a), f((n+\frac{3}{2})a) < f(a)$. Como esses trios não são lados de triângulo o maior comprimento é maior que ou igual à soma dos outros dois, logo $f(a) \geq f(na) + f((n+1)a)$ e $f(a) \geq f((n+\frac{1}{2})a) + f((n+\frac{3}{2})a)$. Somando temos

$$2f(a) \geq f(na) + f\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)a\right) + f((n+1)a) + f\left(\left(n + \frac{3}{2}\right)a\right).$$

Por outro lado, $a, na, (n+\frac{1}{2})a$ e $a, (n+1)a, (n+\frac{3}{2})a$ são lados de triângulo, de modo que $f(a) < f(na) + f((n+\frac{1}{2})a)$ e $f(a) < f((n+1)a) + f((n+\frac{3}{2})a)$; somando obtemos

$$2f(a) < f(na) + f\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)a\right) + f((n+1)a) + f\left(\left(n + \frac{3}{2}\right)a\right)$$

gerando um absurdo.

Logo para todo $n > 2$ a condição é satisfeita para $x = n$ ou $x = n + \frac{1}{2}$. Isso usado no argumento anterior prova que a função f é crescente, já que para todo $b > a > 0$ existe x de uma das formas anteriores tal que $(2x+1)a > b$, e para $b \in]a, (2x+1)a[$ temos $f(b) > f(a) > 0$.

A sequência $f(\frac{1}{n})$ é monótona e limitada e portanto admite um limite L. Se $L > 0$ então para k grande temos $2L > f(\frac{1}{2^k}) > f(\frac{1}{2^{k+1}}) > f(\frac{1}{2^{k+2}}) > L$, de modo que $f(\frac{1}{2^k}), f(\frac{1}{2^{k+1}}), f(\frac{1}{2^{k+2}})$ formariam lados de triângulo, enquanto $\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^{k+1}}, \frac{1}{2^{k+2}}$ não formam. Então $L = 0$ e para ϵ pequeno temos $f(\epsilon)$ próximo de zero.

Agora vamos provar que f é contínua. Dado $\epsilon > 0$ existe $\alpha > 0$ tal que $f(\alpha) < \epsilon$ e para $0 < |x - x_0| < \alpha$ temos que x, x_0, α são lados de triângulo $|f(x) - f(x_0)| < f(\alpha) < \epsilon$. Com isso, conseguimos fazer com que $f(x)$ fique arbitrariamente próximo de $f(x_0)$ para todo x próximo de x_0, o que mostra que f é contínua.

Como $a, b, a+b$ não são lados de triângulo e $a, b, a+b-\epsilon$ são, temos $f(a+b-\epsilon) < f(a) + f(b) \leq f(a+b)$ e como f é contínua $f(a+b) = f(a) + f(b)$. Como é uma equação de Cauchy e a função é crescente concluímos que existe uma constante real positiva c tal que $f(x) = x \cdot c$ para todo x real positivo. É fácil observar que as condições são satisfeitas para todo real positivo c.

PROBLEMA 15

Seja $n \geq 2$. Defina

$$X = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_k \in \{0, 1, 2, \ldots, k\}, k = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Para quaisquer dois elementos $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ e $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ de X, defina

$$s \vee t = (\max\{s_1, t_1\}, \max\{s_2, t_2\}, \ldots, \max\{s_n, t_n\})$$
$$s \wedge t = (\min\{s_1, t_1\}, \min\{s_2, t_2\}, \ldots, \min\{s_n, t_n\}).$$

Encontre o maior valor de $|A|$, $A \subset X$ e $A \neq X$, tais que, para quaisquer $s, t \in A$, $s \vee t \in A$ e $s \wedge t \in A$.

Solução

Resposta: $(n+1)! - (n-1)!$.

Um exemplo que dá certo é obter A tirando todos os elementos de X com $a_n = n$ e $a_{n-1} = 0$; de fato, se aplicarmos $\vee$ em dois elementos quaisquer de A teremos $a_n < n$ e se aplicarmos $\wedge$ em dois elementos quaisquer de A teremos $a_{n-1} > 0$. Há $(n-1)!$ elementos nessas condições, logo o maior valor de $|A|$ é pelo menos $(n+1)! - (n-1)!$.

Como é usual em Álgebra Linear, considere os vetores elementares $x_k = (0, 0, \ldots, 0, k, 0, \ldots, 0)$ em que a única entrada não nula é a k-ésima, e ela é igual a k. Também chame os elementos que têm no máximo uma entrada não nula de *bacanas*. Como

$$(a_1, \ldots, a_n) = (a_1, 0, \ldots, 0) \vee (0, a_2, \ldots, 0) \vee \ldots \vee (0, 0, \ldots, a_n),$$

é fácil de ver que se A contém todos os vetores bacanas então A contém X, o que implicaria $A = X$, absurdo.

Provaremos algo um pouco mais forte: se A tem $|A|$ máximo e contém todos os vetores elementares então A contém X. Basta então provar que todo vetor bacana está contido em A também. De fato, A contém o vetor nulo (basta tomar dois vetores elementares e usar $\wedge$). Se A não contém um vetor v cuja única entrada não nula é a_k na entrada k, então perdemos uma possibilidade para a k-ésima entrada de qualquer vetor de A (se usamos $\wedge$ com x_k e algum vetor que tenha a_k na entrada k obtemos v) e temos $|A| \leq \frac{k}{k+1}(n+1)! \leq \frac{n}{n+1}(n+1)! = (n+1)! - n! \leq (n+1)! - (n-1)!$, absurdo.

Assim, A não contém algum dos vetores elementares x_k. Tome $B = \{(a_1, \ldots, a_n) \in A \mid a_k = k\}$. Então existe $j \neq k$ tal que $a_j \neq 0$ para todo $a \in B$ pois se houvesse para toda coordenada poderíamos usar $\wedge$ e obter tudo zero exceto a_k, que tem que ser k, já que todo elemento de B tem $a_k = k$. Com isso, perdemos todos os vetores com $a_j = 0$ e $a_k = k$, e obtemos

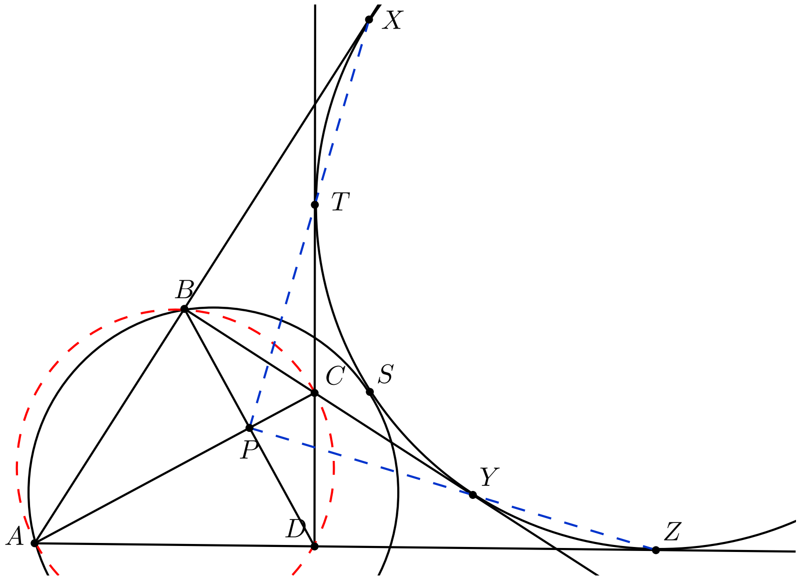
$$\frac{(n+1)!}{(j+1)(k+1)} \geq \frac{(n+1)!}{n(n+1)} = (n-1)!$$

vetores que não estão em B, e portanto não estão em A também. Com isso, $|A| \leq (n+1)! - (n-1)!$.

PROBLEMA 16

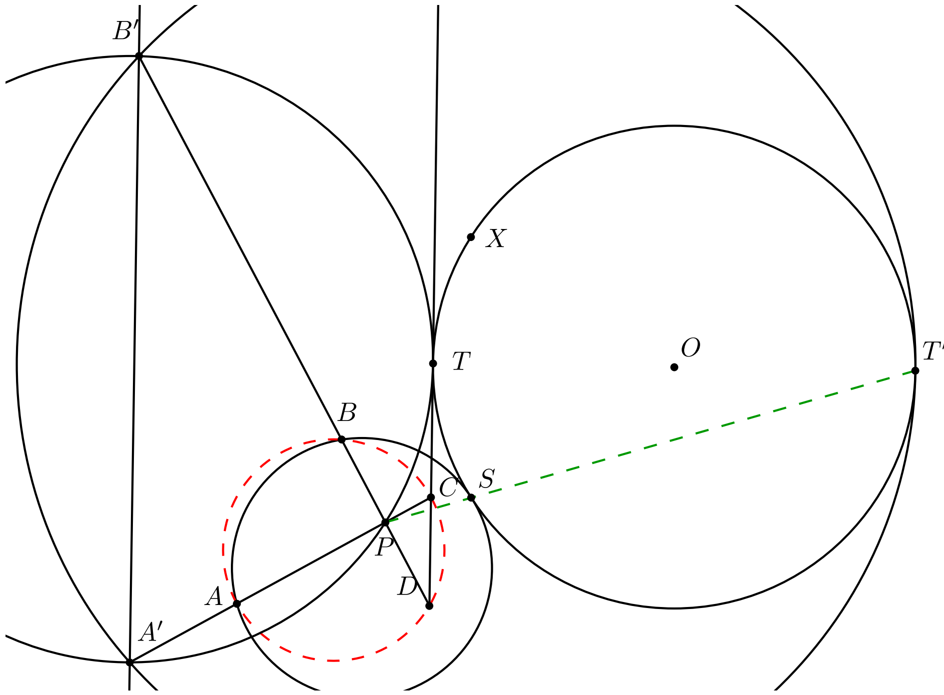
O quadrilátero convexo $ABCD$ é cíclico e admite uma circunferência Γ que tangencia as semirretas AB, BC, AD, DC em X, Y, Z, T, respectivamente, de modo que os pontos de tangência não pertencem aos lados (ou seja, Γ é uma espécie de excírculo). Seja P a interseção das diagonais AC e BD. O círculo Ω passa por A e B e é tangente externamente a Γ em S. Prove que $SP \perp ST$.

Solução



Primeiro ignore que $ABCD$ é cíclico por um momento, e considere Γ como círculo de referência. Uma boa figura sugere qye P, X e T são colineares. De fato, pensando projetivamente, isso é equivalente a provar que a polar de P passa pelo polo de XT. A polar de P passa pela interseção das polares XZ de A e YT de C, e pela interseção das polares XY de B e ZT de D. Mas pelo teorema de Pascal em $XXYTTZ$, os pontos correspondentes a $XX \cap ZZ$, $XY \cap TZ$ e $YT \cap XZ$ são colineares, que é o que queríamos provar. Analogamente P está em YZ, e P é a interseção de XT e YZ.

Aplique agora uma inversão ρ de polo P que fixa Γ. Temos $\rho(T) = X$, $\rho(Y) = Z$. Sendo $\rho(Q) = Q'$ para todo ponto Q, a reta ABX vai para o círculo $A'B'TP$. Além disso, $\angle PA'B' = \angle PBA$ e, sendo $ABCD$ cíclico, $\angle PA'B' = \angle PCD$, e portanto $A'B' \parallel CD$. Agora, AB é tangente a Γ em X, o que quer dizer que o círculo $A'B'TP$ é tangente a Γ em T. Com isso, sendo $A'B' \parallel CD$, e CD tangente a Γ em T, e $A'B'$ corda, $TA' = TB'$.



Logo, sendo U tal que TU é diâmetro de Γ, o circuncírculo de $UA'B'$ é tangente internamente a Γ em U. Desinvertendo, obtemos um círculo que passa por A e B e é tangente externamente a Γ em U', ou seja, Ω. Logo $S = U'$, e $\angle PST = \angle PT'S' = \angle PXU = \angle TXU = 90°$.