Segunda Lista de Preparação para a LVIII IMO
e XXVII Olimpíada Iberoamericana de Matemática
Nível III
Soluções

Prazo: 03/03/2017, 23:59 de Brasília

Álgebra

PROBLEMA 1
Encontre o valor máximo de $(x^2-yz)(y^2-zx)(z^2-xy)$ sabendo que x,y,z são reais tais que $x^2+y^2+z^2=1$.

Solução
Resposta: 1/8.

Seja $f(x,y,z)=(x^2-yz)(y^2-zx)(z^2-xy)$. A parte mais complicada é mostrar que podemos supor que x^2-yz, y^2-zx, z^2-xy são todos não negativos. Feito isso, podemos usar médias:

$$f(x,y,z)\le\left(\frac{x^2-yz+y^2-zx+z^2-xy}{3}\right)^3=\left(\frac{3(x^2+y^2+z^2)-(x+y+z)^2}{6}\right)^3\le\frac{1}{8}.$$

O caso de igualdade é quando $x^2-yz=y^2-zx=z^2-xy$ e $x+y+z=0$, que é equivalente a $x+y+z=0$, já que $x^2-yz-(y^2-zx)=(x-y)(x+y+z)$.

Agora, vamos provar o que afirmamos no primeiro parágrafo. Primeiro, note que $f(-x,-y,-z)=f(x,y,z)$ e f é uma expressão simétrica em x,y,z, de modo que podemos supor que $x+y+z\ge 0$ e $x\ge y\ge z$. Isso já implica $x^2-yz\ge 0$, pois se $x^2<yz$, então $y,z<0$ e $x^2\ge(y+z)^2>yz$.

Suponha que f é máximo para (x,y,z). Então

$$f(x,y,z)-f(x,-y,-z)=-2x(x^2-yz)(y^3+z^3)\ge 0,$$

ou seja, $y^3+z^3\le 0$, e $z\le 0$, de modo que $y^2-zx\ge 0$. Finalmente, $f(x,y,z)>0$, de modo que x^2-yz, y^2-zx e, portanto, z^2-xy são todos positivos. Isso conclui o problema.

PROBLEMA 2
Uma sequência infinita $a_0,a_1,\ldots$ de números reais satisfaz

$$\sum_{n=0}^{m}a_n(-1)^n\binom{m}{n}=0$$

para todo $m>m_0$, m_0 um inteiro positivo fixado. Prove que existe um polinômio P tal que $a_n=P(n)$ para todo $n\ge 0$.

Solução
Considere a função geratriz exponencial

$$A(x)=\sum_{n\ge 0}\frac{(-1)^n a_n x^n}{n!}.$$

Ao multiplicarmos $A(x)$ por $e^x=\sum_{k\ge 0}x^k/k!$ obtemos

$$A(x)e^x=\sum_{n\ge 0}\frac{(-1)^n a_n x^n}{n!}\sum_{k\ge 0}\frac{x^k}{k!}=\sum_{n,k\ge 0}\frac{(-1)^n a_n x^{n+k}}{n!\,k!}=\sum_{m\ge 0}\sum_{n=0}^{m}\frac{(-1)^n a_n x^m}{n!\,(m-n)!}=\sum_{m\ge 0}\sum_{n=0}^{m}\frac{(-1)^n\binom{m}{n}a_n x^m}{m!}.$$

Como o numerador dessas frações é zero para $m>m_0$, $A(x)e^x$ é um polinômio $Q(x)=\sum_{m\ge 0}q_m x^i/m!$ em x, com grau menor ou igual a m_0. Invertendo, temos

$$A(x)=Q(x)e^{-x}=\sum_{m\ge 0}\frac{q_m x^m}{m!}\sum_{k\ge 0}\frac{(-1)^k x^k}{k!}=\sum_{m\ge 0}\sum_{k\ge 0}\frac{(-1)^k q_m x^{m+k}}{m!\,k!}=\sum_{n\ge 0}\sum_{m\ge 0}\frac{(-1)^{n-m}\binom{n}{m}q_m x^n}{n!}$$

Logo

$$(-1)^n a_n=\sum_{m=0}^{m_0}q_m(-1)^{n-m}\binom{n}{m}\iff a_n=\sum_{m=0}^{m_0}(-1)^m q_m\binom{n}{m},$$

que é um polinômio em n.

Observação: a fórmula

$$b_m = \sum_{n=0}^{m} (-1)^n \binom{m}{n} a_n \implies a_n = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \binom{n}{m} b_m$$

é a *fórmula da inversão binomial*. Você pode usá-la para encontrar a quantidade de permutações caóticas, por exemplo!

PROBLEMA 3
Dado um inteiro positivo n, defina $f(0,j) = f(i,0) = 0$, $f(1,1) = n$ e

$$f(i,j) = \left\lfloor \frac{f(i-1,j)}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{f(i,j-1)}{2} \right\rfloor$$

para todos i, j inteiros positivos, $(i,j) \neq (1,1)$. Quantos pares ordenados (i,j) de inteiros positivos são tais que $f(i,j)$ é ímpar?

Solução
Resposta: n.

Considere o seguinte jogo: inicialmente há n pedras no ponto $(1,1)$. Um passo consiste em fazer a seguinte operação em todos os pontos do plano simultaneamente: se há m pedras no ponto (i,j), coloque $\lfloor m/2 \rfloor$ em cada um dos pontos $(i+1,j)$ e $(i,j+1)$ (sim, tiramos todas as pedras de (i,j) se m é par, e deixamos uma se m é ímpar).

Note que se uma fila não está vazia, então ela nunca fica vazia. Deste modo, as pedras nunca saem do quadrado $[1,n]^2$, e o jogo termina em uma quantidade finita de passos.

Após $i+j-2$ passos, a quantidade de pedras em (i,j) é igual a $f(i,j)$ (isso é imediato por indução em $i+j$).

Para acabar o problema, note que, após $i+j-2$ passos, o ponto (i,j) só perde pedra e mantém a paridade da quantidade de pedras, e o jogo termina quando as pedras estão sozinhas nas casas; essas casas correspondem as valores de $f(i,j)$ que são ímpares.

Combinatória

PROBLEMA 4
Encontre a maior quantidade possível de triângulos retângulos determinados por três de 100 retas no plano.

Solução
Resposta: 62500.

Considere 100 retas no plano. Particione as retas em conjuntos A_i, B_i em que todas as retas em A_i são paralelas entre si e todas as retas de B_i são perpendiculares às retas de A_i (B_i pode ser potencialmente vazio). Seja $a_i = |A_i|$ e $b_i = |B_i|$ e suponha que haja k pares de conjuntos. Então a quantidade de triângulos retângulos é

$$\sum_{i=1}^{k} a_i b_i (100 - a_i - b_i) \leq \sum_{i=1}^{k} \frac{(a_i+b_i)^2(100-a_i-b_i)}{4} \leq \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{k} (a_i+b_i)[(a_i+b_i)(100-a_i-b_i)]$$
$$\leq \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{k} (a_i+b_i)\frac{[(a_i+b_i+100-a_i-b_i)]^2}{4} = 625 \cdot \sum_{i=1}^{k} (a_i+b_i) = 62500.$$

Um exemplo com 100 retas que dão o caso de igualdade é, considerando o plano cartesiano, $x = i$, $i = 1, 2, \ldots, 25$, $y = i$, $i = 1, 2, \ldots, 25$, $x + y = 100 + i$, $i = 1, 2, \ldots, 25$, $y = x + 25 + i$, $i = 1, 2, \ldots, 25$. Nesse caso, o total de triângulos é $25 \cdot 25 \cdot 50 + 25 \cdot 25 \cdot 50 = 62500$.

PROBLEMA 5
Dados quaisquer $2n-1$ subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, n\}$, cada um com dois elementos, prove que é sempre possível escolher n deles cuja união tem $\frac{2}{3}n + 1$ ou menos elementos.

Solução
Provaremos por indução em k, $k \leq \frac{2n-1}{3}$, que é possível tirar $3k$ subconjuntos de modo que a união dos subconjuntos restantes tem $n-k$ ou menos elementos. O resultado então vai sair fazendo $k = \lfloor \frac{n-1}{3} \rfloor$, pois $n - \lfloor \frac{n-1}{3} \rfloor \leq n - \frac{n-3}{3} = \frac{2}{3}n + 1$.

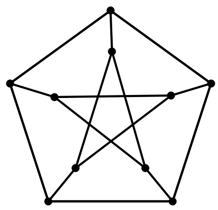
O caso $k = 0$ é imediato. Suponha então que $k \geq 1$. Então, pela hipótese de indução, é possível tirar $3(k-1)$ subconjuntos, sobrando $n-k+1$ elementos. Como $2n - 1 - 3(k-1) < 2(n-k+1)$, pelo menos um dos elementos que sobraram está contido em no máximo três dos suconjuntos que sobraram, e podemos tirar esses três subconjuntos e retirar um elemento, o que completa nossa indução, e o problema.

PROBLEMA 6
A Deziânia é um país com dez cidades. Alguns pares de cidades são interligadas por uma estrada de duas mãos, e cada estrada liga exatamente duas cidades. Diz a lenda que se três ou quatro cidades estarem ligadas em ciclo por estradas, a Deziânia será destruída. Qual é a maior quantidade de estradas que podem ser construídas de modo que essa desgraça não ocorra?

Solução
Resposta: 15.

Traduzindo para a linguagem de grafos, temos um grafo com 10 vértices, sem triângulos ou ciclos de tamanho quatro, e queremos saber a quantidade máxima de arestas que esse grafo pode ter.

Um exemplo com 15 arestas é o grafo de Petersen, cujos ciclos têm pelo menos seis vértices:



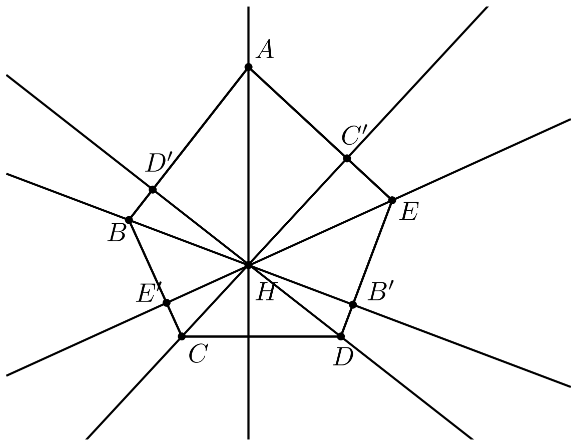
Esse grafo tem grau médio $15 \cdot 2/5 = 3$.

Considere o grau máximo de um grafo qualquer com dez vértices. Se o grau máximo é 4 ou mais, sendo v esse vértice e v_1, v_2, v_3, v_4 quatro de seus vizinhos, não podemos ter arestas ligadas entre eles, e dos demais 5 vértices, podemos ter no máximo 5 arestas entre eles, pois mais de cinco arestas implica presença de ciclo, e o único ciclo possível é o 5-ciclo, e colocar mais uma aresta forma triângulo, e cada um desses cinco vértices está ligado a no máximo um dos outros cinco, dando um total de no máximo $4 + 5 + 5 = 14$ arestas. Assim, o grau máximo é menor ou igual a 3, e mostramos um exemplo com todos os graus iguais a 3.

Geometria

PROBLEMA 7
Definimos *altura* de um pentágono convexo como a reta que passa por um vértice e é perpendicular ao lado oposto ao vértice (se $ABCDE$ é o pentágono então o lado oposto a A é CD). Prove que se quatro alturas têm um ponto comum H então a outra altura também passa por P.

Solução
Seja $ABCDE$ o pentágono e suponha que as alturas por B, C, D, E se cortam em H. Sejam B', C', D', E' as interseções das alturas por B, C, D, E com os lados opostos, respectivamente. Temos que provar que $AH \perp CD$.

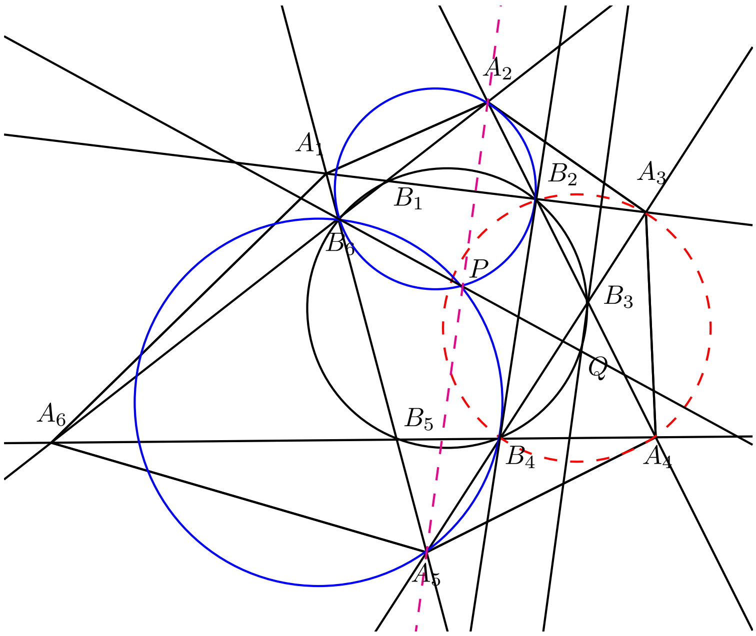


Como $\angle BD'D = \angle BB'D = 90°$, $BD'B'D$ é inscritível, e $HB \cdot HB' = HD \cdot HD'$. Analogamente, $HB \cdot HB' = HE \cdot HE' = HC \cdot HC'$.

Com isso, $HC \cdot HC' = HD \cdot HD'$, de modo que $CD'C'D$ é inscritível, e $\angle CC'D' = \angle CDD'$. Agora, $AD'HC'$ também é inscritível, logo $\angle D'AH = \angle D'C'H = \angle D'C'C = \angle CDD' = \angle CDH$, e $AH \perp CD$.

PROBLEMA 8
Seja $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ um hexágono convexo tal que $\angle A_1A_3A_5 = \angle A_2A_4A_6$ e $\angle A_2A_3A_1 = \angle A_5A_4A_6$. Defina B_i como a interseção das diagonais A_iA_{i+2} e $A_{i-1}A_{i+1}$, em que os índices são tomados módulo 6. Suponha que $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$ é inscritível em um círculo Γ. Os circuncírculos de $A_2B_2B_6$ e $A_5B_4B_6$ se cortam novamente em $P \neq B_6$. A reta B_6P corta Γ novamente em Q. Prove que as retas B_2B_4 e QB_3 são paralelas.

Solução



Denotaremos por $m_a(B_iB_j)$ a medida angular do arco B_iB_j percorrido de B_i a B_j no sentido anti-horário. Note que a condição $\angle A_1A_3A_5 = \angle A_2A_4A_6$ implica o quadrilátero $B_2A_3A_4B_4$ ser cíclico.

A condição $\angle A_2A_3A_1 = \angle A_6A_4A_5$, combinada com $\angle B_4A_3B_2 = \angle B_4A_4B_2$ do quadrilátero cíclico $B_2A_3B_4B_4$, nos mostra que $\angle A_2A_3A_5 = \angle A_2A_4A_5$, ou seja, $A_2A_3A_4A_5$ também é inscritível.

Com uma boa figura, podemos conjecturar que $P \in A_2A_5$. De fato,

$$\angle B_6PA_2 = \angle B_6B_2A_2 = \angle A_1B_2A_2 + \angle B_1B_2B_6 = 180^\circ - \angle B_1B_2B_3 + \frac{1}{2}m_a(B_1B_6)$$
$$= 180^\circ - \frac{1}{2}m_a(B_1B_3) + \frac{1}{2}m_a(B_1B_6) = 180^\circ - \frac{1}{2}m_a(B_6B_3)$$

e

$$\angle B_6PA_5 = \angle B_6B_4A_5 = 180^\circ - \angle B_6B_4B_3 = \frac{1}{2}m_a(B_3B_6).$$

Somando temos

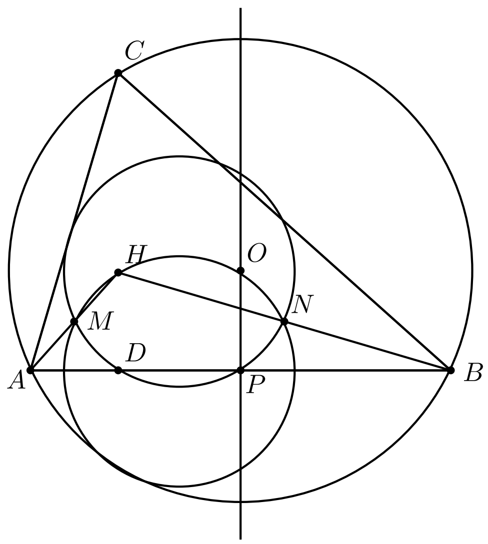
$$\angle B_6PA_2 + \angle B_6PA_5 = 360^\circ - \frac{1}{2}(m_a(B_6B_3) + m_a(B_3B_6)) = 360^\circ - \frac{1}{2}\cdot 360^\circ = 180^\circ.$$

Agora, note que $\angle A_5A_2A_4 = \angle A_5A_3A_4 = \angle B_4B_2A_4$, de modo que $A_2A_5 \parallel B_2B_4$. Para terminar, $\angle QB_6B_2 = \angle PB_6B_2 = \angle PA_2B_2 = \angle A_5A_2B_4 = \angle B_4B_2B_3$. Com isso, o arco menor QB_2 é igual ao arco menor B_4B_3, e tirando o arco comum QB_3 obtemos $\angle B_4B_3Q = \angle B_2B_4B_3 \iff B_2B_4 \parallel QB_3$.

PROBLEMA 9

Sejam O e H respectivamente o circuncírculo e o ortocentro do triângulo acutângulo e escaleno ABC. Sendo M e N os pontos médios de AH e BH, prove que se $MNOH$ é cíclico então o seu circuncírculo tangencia o circuncírculo de ABC.

Solução



Primeiro, note que, sendo MN base média de ABH, a reflexão de H com relação a MN é o ponto D sobre AB, o pé da altura. Assim, o circuncírculo de MNH é a reflexão do circuncírculo de DMN, que é o círculo dos nove pontos, com relação a MN. Assim, a reflexão de O com relação a MN pertence ao círculo dos nove pontos. Mas essa reflexão pertence à perpendicular por O a AB, ou seja, a mediatriz de AB. Logo essa reflexão é a interseção dessa mediatriz com o círculo dos nove pontos. Suponha que essa interseção Q não seja o ponto médio de AB. Então DQ é diâmetro do círculo dos nove pontos, e portanto HO é o diâmetro do circuncírculo de $MNOH$, e O está no exterior de ABC, absurdo. Assim, a reflexão de O com relação a MN é o ponto médio P de AB, e $OH \parallel AB$.

Como o raio do círculo dos nove pontos é metade do circunraio R de ABC, o circuncírculo de $MNOH$ tem diâmetro R e passa por O, sendo então tangente ao circuncírculo de ABC.

Teoria dos Números

PROBLEMA 10

Seja k um inteiro positivo e $n = (2^k)!$. Sendo $\sigma(n)$ a soma dos divisores positivos de n, prove que $\sigma(n)$ tem um fator primo maior do que 2^k.

Solução

Note que $\sigma(n) = \prod_{p^\alpha \| n} \frac{p^{\alpha+1}-1}{p-1}$. Vamos calcular a quantidade de fatores primos de n: sendo $n = (2^k)!$, esse total é

$$\alpha_2 = \sum_{i \geq 1} \left\lfloor \frac{2^k}{2^i} \right\rfloor = 2^{k-1} + 2^{k-2} + \cdots + 2 + 1 = 2^k - 1.$$

Então $2^{2^k} - 1 \mid \sigma(n)$, e portanto $2^{2^{k-1}} + 1 \mid \sigma(n)$ também. Mas, sendo p um divisor primo de $2^{2^{k-1}} + 1$, $\operatorname{ord}_p 2 \mid 2^k$ e $\operatorname{ord}_p 2 \nmid 2^{k-1}$, ou seja, $\operatorname{ord}_p 2 = 2^k$, ou seja, $2^k \leq p - 1 \iff p \geq 2^k + 1$. Assim, todo divisor primo de $2^{2^{k-1}} + 1$ é maior do que 2^k.

PROBLEMA 11

Determine se existe um polinômio $P(x)$ de coeficientes inteiros tal que $P\left(1 + \sqrt[3]{2}\right) = 1 + \sqrt[3]{2}$ e $P(\left(1 + \sqrt{5}\right) = 2 + 3\sqrt{5}$.

Solução

Resposta: não.

Primeiro, considere $Q(x) = P(x) - x$, que obviamente tem coeficientes inteiros. Então polinômio minimal de $1 + \sqrt[3]{2}$, que é $R(x) = (x-1)^3 - 2 = x^3 - 3x^2 + 3x - 3$, divide $Q(x)$.

Considere o seguinte (e conhecido) lema: se $A(x)$ é um polinômio com coeficientes inteiros, e a, b, c, d são inteiros tais que $A(a + b\sqrt{5}) = c + d\sqrt{5}$ então $A(a - b\sqrt{5}) = c - d\sqrt{5}$. Para ver isso, basta ver que, sendo $A(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$,

$$\begin{aligned} A(a + b\sqrt{5}) &= \sum_{i=0}^{n} a_i (a + b\sqrt{5})^i = \sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} a^{i-j} b^j (\sqrt{5})^j \\ &= \sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{j=0, 2 \mid j}^{i} \binom{i}{j} a^{i-j} b^j 5^{j/2} + \sqrt{5} \cdot \sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{j=0, 2 \nmid j}^{i} \binom{i}{j} a^{i-j} b^j 5^{(j-1)/2} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} A(a - b\sqrt{5}) &= \sum_{i=0}^{n} a_i (a - b\sqrt{5})^i = \sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} a^{i-j} (-b)^j (\sqrt{5})^j \\ &= \sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{j=0, 2 \mid j}^{i} \binom{i}{j} a^{i-j} b^j 5^{j/2} - \sqrt{5} \cdot \sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{j=0, 2 \nmid j}^{i} \binom{i}{j} a^{i-j} b^j 5^{(j-1)/2} \end{aligned}$$

Assim, sendo $Q(1 + \sqrt{5}) = 1 + 2\sqrt{5}$, e, sendo Q com coeficientes inteiros, $Q(1 - \sqrt{5}) = 1 - 2\sqrt{5}$. Além disso, $R(1 + \sqrt{5}) = 5\sqrt{5} - 2$ e $R(1 - \sqrt{5}) = -\sqrt{5} - 2$.

Como $R(x)$ divide $Q(x)$, ou seja, $Q(x) = R(x)T(x)$, R e T com coeficientes inteiros, sendo $T(1 + \sqrt{5}) = a + b\sqrt{5}$, a, b inteiros,

$$\begin{aligned} & Q(1 + \sqrt{5}) Q(1 - \sqrt{5}) = R(1 + \sqrt{5}) R(1 - \sqrt{5}) T(1 + \sqrt{5}) T(1 - \sqrt{5}) \\ \iff & (1 + 2\sqrt{5})(1 - 2\sqrt{5}) = (5\sqrt{5} - 2)(-5\sqrt{5} - 2)(a + b\sqrt{5})(a - b\sqrt{5}) \\ \iff & -19 = -121(a^2 - 5b^2), \end{aligned}$$

absurdo pois 121 não divide 19.

PROBLEMA 12

A sequência $\{a_n\}$ satisfaz $a_n + a_{n+1} = 2a_{n+2}a_{n+3} + 2017$, $n \geq 1$. Encontre todos os valores de a_1 e a_2 para os quais a_n é inteiro para todo n inteiro positivo.

Solução

Resposta: $(a_1, a_2) = (1, -2016)$, $(-2016, 1)$, $(0, 2017)$, $(-18, 55)$, $(55, -18)$, $(19, -54)$, $(-54, 19)$.

Seja $b_n = a_{n+2} - a_n$. Então, subtraindo a recorrência para n e $n+1$, temos

$$(a_{n+1} + a_{n+2}) - (a_n + a_{n+1}) = 2a_{n+3}a_{n+4} - 2a_{n+2}a_{n+3} \iff b_n = 2a_{n+3}b_{n+2}.$$

Assim dá para "telescopar", e encontramos

$$b_1 = 2^n b_{2n+1} a_2 a_4 \ldots a_{2n+2} \quad \text{e} \quad b_2 = 2^n b_{2n+2} a_3 a_5 \ldots a_{2n+3}.$$

Assim, b_1 e b_2 são inteiros divisíveis por 2^n para todo n. Isso só é possível se $b_1 = b_2 = 0$. Substituindo obtemos $a_1 = a_3$ e $a_2 = a_4$, e obtemos para $n = 1$

$$a_1 + a_2 = 2a_3a_4 + 2017 \iff (2a_1 - 1)(2a_2 - 1) = -4033 = -37 \cdot 109.$$

Com isso, encontramos os pares $(a_1, a_2) = (1, -2016)$, $(-2016, 1)$, $(0, 2017)$, $(-18, 55)$, $(55, -18)$, $(19, -54)$, $(-54, 19)$. Em cada um desses exemplos $a_n = a_{n+2}$ para todo n.

Problemas gerais

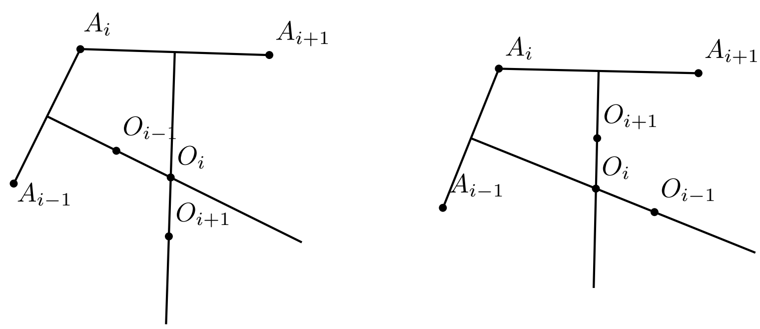
PROBLEMA 13

Seja $n \geq 5$ inteiro e seja $A_1A_2 \ldots A_n$ um n-ágono convexo cujos ângulos internos são todos obtusos. Para cada $1 \leq i \leq n$ seja O_i o circuncentro de $A_{i-1}A_iA_{i+1}$, em que os índices são vistos módulo n. Prove que a linha poligonal fechada $O_1O_2 \ldots O_n$ não é um n-ágono convexo.

Solução

Suponha o contrário. Note que O_i e O_{i-1} estão na mediatriz de $A_{i-1}A_i$, e assim $O_{i-1}O_i \perp A_{i-1}A_i$. Logo $\angle O_{i-1}O_iO_{i+1} = \angle A_{i-1}A_iA_{i+1}$ ou $\angle O_{i-1}O_iO_{i+1} = 180° - \angle A_{i-1}A_iA_{i+1}$. De qualquer forma, como $\angle A_{i-1}A_iA_{i+1}$ é obtuso, $\angle O_{i-1}O_iO_{i+1} \leq \angle A_{i-1}A_iA_{i+1}$. Mas ambos os polígonos $A_1A_2 \ldots A_n$ e $O_1O_2 \ldots O_n$ têm a mesma soma dos ângulos internos, logo as desigualdades são igualdades, ou seja, $\angle O_{i-1}O_iO_{i+1} = \angle A_{i-1}A_iA_{i+1}$.

Deste modo, as posições relativas de A_{i-1}, A_i, A_{i+1}, O_{i-1}, O_i, O_{i+1} são de uma das duas maneiras a seguir:



Assim, $O_{i-1}A_i < O_iA_i < O_{i+1}A_i$ ou $O_{i-1}A_i > O_iA_i > O_{i+1}A_i$. Sendo R_i o circunraio de $A_{i-1}A_iA_{i+1}$, então essas desigualdades se traduzem em $R_{i-1} < R_i < R_{i+1}$ ou $R_{i-1} > R_i > R_{i+1}$, o que é falso quando R_i é o máximo dos circunraios. Chegamos a uma contradição, e portanto $O_1O_2 \ldots O_n$ não é um polígono convexo.

PROBLEMA 14

Zé Roberto e Umberto fazem um jogo de adivinhação. Zé Roberto pensa secretamente em uma 100-upla ordenada $(x_1, x_2, \ldots, x_{100})$ de inteiros. Como é difícil lembrar 100 números, ele se limita a pensar numa 100-upla em que 99 dos números são iguais e o outro é diferente, mas ele pode colocar o número diferente em qualquer posição.

Umberto sabe dessa regra e deve adivinhar a 100-upla de Zé Roberto. Para tanto, ele fala a Zé Roberto uma 100-upla $(y_1, y_2, \ldots, y_{100})$, e Zé Roberto informa a Umberto o resultado da conta $x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_{100}y_{100}$. Umberto pode então repetir o procedimento quantas vezes quiser, usando a informação das contas anteriores se quiser.

Qual é a quantidade mínima de 100-uplas que Umberto deve falar para garantir que consegue adivinhar a 100-upla de Zé Roberto?

Solução

Resposta: 2.

Primeiro mostremos que uma tentativa não é suficiente, ou seja, para qualquer 100-upla $(y_1, \dots, y_{100})$ que Umberto falar existem pelo menos duas possíveis 100-uplas que satisfazem a equação $x_1y_1 + \cdots + x_{100}y_{100} = k$. Se $y_i = y_j$ para algum $i \neq j$, podemos escolher 99 uns e um zero, sendo o zero em qualquer posição diferente de i e j. Assim, os y_i precisam ser todos distintos. Seja $S = y_1 + \cdots + y_{100}$, e considere dois números y_i e y_j diferentes de S (há 100 números, dois deles são diferentes de S). Tome $x_i = 0$ e $x_k = S - y_j$, $k \neq i$, e obtemos o resultado $x_1y_1 + \cdots + y_{100}y_{100} = (S - y_i)(S - y_j)$. É claro que podemos trocar i e j, e obtemos a segunda possibilidade. Logo uma pergunta não é suficiente.

Agora, duas perguntas são suficientes: escolha $(1, -1, 1, -1, \dots, -1)$. Sendo a o número que aparece 2016 vezes e b o número que aparece uma vez, o resultado da conta é $R = (-1)^t(a - b)$, em que t é a posição do b.

Para a segunda pergunta escolha $(y_1, \dots, y_{100})$ tais que $\text{mdc}(y_1 + \cdots + y_{100}, R) = 1$ e não haja dois $(-1)^i y_i$ congruentes módulo $S = y_1 + \cdots + y_{100}$. Por exemplo, $y_1 = 1$ e $y_i = |R|i$, $i > 1$, funciona. A conta obtida é

$$R' = (S - y_t)a + y_t b = S - y_t(a - b) = Sa - y_t(-1)^t R.$$

Vendo módulo S, temos $(-1)^t y_t R$ módulo S, e invertendo R, de $(-1)^t y_t$, e podemos encontrar t. Sabendo t, é só resolver o sistema obtido: encontramos a de R', S, R, y_t e t, e encontramos b de R e t.

PROBLEMA 15

Seja $x_0, x_1, x_2, \dots$ uma sequência infinita de racionais definidos por

$$x_{n+1} = \begin{cases} \left|\frac{x_n}{2} - 1\right| & \text{se o numerador de } x_n \text{ é par} \\ \left|\frac{1}{x_n} - 1\right| & \text{se o numerador de } x_n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

O valor inicial x_0 é arbitrário.

Prove que

(a) a sequência tem uma quantidade finita de termos distintos.

(b) a sequência contém exatamente um dos números 0 e 2/3.

Solução

(a) Primeiro, tirando possivelmente x_0, todos os termos da sequência são não negativos. Sendo $x_n = p_n/q_n$, $\text{mdc}(p_n, q_n) = 1$, se p_n é par $\frac{x_n}{2} - 1 = \frac{p_n/2 - q_n}{q_n}$, com $\text{mdc}(p_n/2 - q_n, q_n) = \text{mdc}(p_n/2, q_n) = 1$ e se p_n é ímpar $\frac{1}{x_n} - 1 = \frac{q_n - p_n}{p_n}$, com $\text{mdc}(q_n - p_n, p_n) = 1$. Assim, representando x_n por (p_n, q_n), temos que x_{n+1} vai para $(|p_n/2 - q_n|, q_n)$ ou $(|p_n - q_n|, p_n)$. Então $\max(p_n, q_n)$ nunca aumenta, pois estamos subtraindo de q_n, p_n ou $p_n/2$.

Assim, como há uma quantidade finita de frações com numerador e denominador menores ou iguais a $\max(|p_0|, |q_0|)$, a sequência tem uma quantidade finita de termos distintos.

(b) Primeiro provemos que os dois não aparecem na mesma sequência. Se 0 aparece primeiro, a sequência é igual a 0 a partir desse ponto, e 2/3 não aparece. Se 2/3 aparece primeiro, a sequência é igual a 2/3 a partir desse ponto, e 2/3 não aparece.

Provemos agora que pelo menos um dos dois números aparece. Suponha que zero não aparece; temos então que provar que 2/3 aparece. A ideia é examinar melhor as desigualdades do item anterior, verificando quando elas são estritas.

- Se $p_n > q_n$, p_n par: o máximo muda de p_n para $\max(|p_n/2 - q_n|, q_n) < p_n$.
- Se $p_n < q_n$, p_n ímpar: o máximo muda de q_n para $\max(|p_n - q_n|, p_n) < q_n$.

Então, como não é possível diminuir o máximo para sempre, a partir de um ponto só ocorre um de dois casos: ou $p_n < q_n$ com p_n par ou $p_n > q_n$ com p_n ímpar. No primeiro caso, o próximo termo é $\frac{|p_n/2 - q_n|}{q_n} = 1 - \frac{p_n/2}{q_n} < 1$, e devemos ter $p_{n+1} < q_{n+1}$, ou seja, p_{n+1} deve ser par; no segundo caso, o próximo termo é $\frac{|p_n - q_n|}{p_n} = 1 - \frac{q_n}{p_n} < 1$, e novamente devemos ter p_{n+1} par. Em resumo, a partir de um ponto devemos sempre ter $x_{n+1} = 1 - \frac{x_n}{2} \iff x_{n+1} - 2/3 = -\frac{x_n - 2/3}{2}$. A sequência é periódica, então $x_{n+k} = x_n$ para algum $k > 0$ e todo n suficientemente grande. Não é difícil ver que $x_{n+i} = \frac{2}{3} + \frac{x_n - 2/3}{(-2)^i}$, ou seja, para $i = k$, $x_n = \frac{2}{3} + \frac{x_n - 2/3}{(-2)^k} \iff x_n = \frac{2}{3}$ ou $(-2)^k = 1 \iff x_n = \frac{2}{3}$. Logo toda sequência é, a partir de algum ponto, constante igual a 0 ou 2/3.

PROBLEMA 16
Prove que não existem racionais x, y tais que $x - \frac{1}{x} + y - \frac{1}{y} = 4$.

Solução
Primeiro vamos reduzir o problema para os positivos: note que se (x, y) é solução então podemos trocar x por $-1/x$ ou y por $-1/y$. Então podemos supor que $x, y > 0$.

A equação é equivalente a $(x+y)(xy-1) = 4xy$. Sendo $P = xy$ e $S = x + y$, $S = 4P/(P-1)$, ou seja, x e y são soluções da equação

$$t^2 - \frac{4P}{P-1}t + P = 0.$$

Com isso, $\Delta = \left(\frac{4P}{P-1}\right)^2 - 4P$ é o quadrado de um racional, assim como $(2P)^2 - P(P-1)^2 = P(6P - P^2 - 1)$. Agora, sendo $P = m/n$, $\mathrm{mdc}(m, n) = 1$, multiplicando por n^4 obtemos que $mn(6mn - m^2 - n^2)$ é o quadrado de um inteiro. Mas $\mathrm{mdc}(m, 6mn - m^2 - n^2) = \mathrm{mdc}(m, n^2) = 1$, e analogamente $\mathrm{mdc}(n, 6mn - m^2 - n^2) = 1$, logo $m = u^2$, $n = v^2$ e $6mn - m^2 - n^2 = w^2$. Substituindo obtemos a equação diofantina

$$w^2 = 6u^2v^2 - u^4 - v^4 = (2uv)^2 - (u^2 - v^2)^2.$$

Note também que $\mathrm{mdc}(u, v) = \mathrm{mdc}(\sqrt{m}, \sqrt{n}) = 1$ e $u \neq v$, pois se $u = v$ então $P = 1$ e $S = 4P/(P-1)$ não estaria definido. Podemos supor, sem perdas, que $u > v$. Temos uma terna pitagórica com catetos w e $u^2 - v^2$ e hipotenusa $2uv$. Como toda terna pitagórica primitiva em hipotenusa ímpar, w e $u^2 - v^2$ são ambos pares (para cortar o 2 do uv), e sendo $\mathrm{mdc}(u, v) = 1$, u e v são ímpares. Finalmente, $\mathrm{mdc}((u^2 - v^2)/2, uv) = 1$ e temos a terna pitagórica primitiva $(\frac{w}{2}, \frac{u^2-v^2}{2}, uv)$. Logo existem inteiros a e b tais que $\mathrm{mdc}(a, b) = 1$,

$$w = 2(a^2 - b^2), \quad u^2 - v^2 = 4ab, \quad uv = a^2 + b^2.$$

Ignoraremos w a partir de agora. Podemos supor sem perdas que a é par e b é ímpar. Temos $(u-v)(u+v) = 4ab$, assim existem A, B, C, D coprimos dois a dois tais que $u + v = 2AB$, $u - v = 2CD$, $a = AC$ e $b = BD$. Temos então

$$(AB + CD)(AB - CD) = (AC)^2 + (BD)^2 \iff 2A^2B^2 = (A^2 + D^2)(B^2 + C^2).$$

Como a é par, A ou C é par, e sendo A, B, C, D coprimos dois a dois, os outros três números são ímpares. Se A é par, $A^2 + D^2$ é ímpar, $B^2 + C^2 \equiv 2 \pmod 4$, e $0 \equiv 2A^2B^2 \equiv 2 \pmod 4$, absurdo. Logo C é par. Assim, como B^2 é primo com $B^2 + C^2$ e A^2 é primo com $A^2 + D^2$, $A^2 = B^2 + C^2$ e $2B^2 = A^2 + D^2$. Da primeira equação, $A = k^2 + \ell^2$, $C = 2k\ell$ e $B = k^2 - \ell^2$. Substituindo obtemos $D^2 = 2(k^2 - \ell^2)^2 - (k^2 + \ell^2)^2 = k^4 + \ell^4 - 6k^2\ell^2 \iff (2D)^2 = 6(k+\ell)^2(k-\ell)^2 - (k+\ell)^4 - (k-\ell)^4$. A mesma equação que $w^2 = 6u^2v^2 - u^4 - v^4$. Então se supusermos que $u + v$ é mínimo chegamos a um absurdo, pois $u + v = 2AB = 2B(k^2 + \ell^2) > 2k = (k + \ell) + (k - \ell) > 0$.

Com isso, a equação dada não tem soluções racionais.