Primeira Lista de Preparação para a LVIII IMO
e XXVII Olimpíada Iberoamericana de Matemática
Nível III

Prazo: 17/02/2017, 23:59 de Brasília

Álgebra

PROBLEMA 1
O algarismo mais à esquerda (na base decimal) dos números 4^n e 5^n são iguais. Prove que esse algarismo é 2 ou 4.

PROBLEMA 2
Encontre todos os pares (α, β) de reais positivos tais que

$$\lfloor \alpha \lfloor \beta x \rfloor \rfloor = \lfloor \beta \lfloor \alpha x \rfloor \rfloor$$

para todo x real.

PROBLEMA 3
Um polinômio é *realístico* se todos os seus coeficientes são reais. Sejam P e Q polinômios de coeficientes complexos tais que a composição $P \circ Q(x) = P(Q(x))$ é realística. Suponha que os coeficientes líder e independente de Q são ambos reais. Prove que P e Q são ambos realísticos.

Combinatória

PROBLEMA 4
Em cada vértice de um prisma com bases n-agonais escrevemos o número 1 ou -1. Para que valores de n é possível fazer isso de modo que os produtos dos números em cada face sejam todos iguais a -1?

PROBLEMA 5
Aino pensou em um número N pertencente a $A = \{1, 2, \ldots, 1001\}$, e Eino precisa adivinhar o número de Aino. Para isso, Eino escreve na lousa três listas, cada uma com subconjuntos distintos de A, e Aino diz para Eino as quantidades de subconjuntos na lousa de cada uma das listas que contêm N (ou seja, Aino diz para Eino uma tripla ordenada de números inteiros não negativos correspondentes às três listas de Eino). Um subconjunto pode aparecer em mais de uma lista.

Qual é a menor quantidade total de subconjuntos que Eino deve escrever na lousa para conseguir adivinhar o número de Aino, não importando quais são as respostas de Aino?

PROBLEMA 6
Na OBMlândia há uma quantidade finita de clubes de matemática. Quaisquer dois clubes de matemática têm pelo menos um membro em comum. Prove que é possível distribuir para os cidadãos da OBMlândia réguas e compassos de modo que somente uma pessoa recebe ambos e tal que cada clube tem à disposição pelo menos uma régua e pelo menos um compasso (mais precisamente, cada clube tem um membro que tem uma régua e um membro – talvez a mesma pessoa! – que tem um compasso).

Geometria

PROBLEMA 7
Os pontos D e E trissectam o lado AB do triângulo equilátero ABC, com D entre A e E. O ponto F está sobre o lado BC e é tal que $CF = AD$. Calcule $\angle CDF + \angle CEF$.

PROBLEMA 8
No triângulo ABC, $BC = 1$. Sabe-se que existe um único ponto D sobre o lado BC tal que $DA^2 = DB \cdot DC$. Encontre os possíveis valores do perímetro de ABC.

PROBLEMA 9
Seja ABC um triângulo com incentro I e circuncentro $O \neq I$. Para cada ponto X no interior de ABC seja $f(X)$ a soma das distâncias de X às retas AB, BC e CA. Prove que se P e Q são pontos no interior de ABC tais que $f(P) = f(Q)$ então $PQ \perp OI$.

Teoria dos Números

PROBLEMA 10
Encontre todos os pares de inteiros positivos distintos $\{a, b\}$ tais que $a + b$ e $ab + 1$ são ambos potências de 2.

PROBLEMA 11
Encontre todos os inteiros positivos n que podem ser representados na forma $n = \text{mmc}(a,b) + \text{mmc}(b,c) + \text{mmc}(c,a)$ para a, b, c inteiros positivos.

PROBLEMA 12
Sejam $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ e $a_n = 4a_{n-1} - a_{n-2}$ para $n \geq 2$. Encontre um fator primo ímpar de a_{500}.

Problemas gerais

PROBLEMA 13
Considere n carros $C_1, C_2, \ldots, C_n$ de tamanhos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, todos inteiros, e um estacionamento de largura $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, com posições marcados de 1 a s. Cada carro tem um lugar favorito c_i. Os carros, começando por C_1, depois C_2, e assim por diante, estacionam da seguinte forma: cada carro C_i procura o menor lugar $j \geq c_i$ tal que os lugares $j, j+1, \ldots, j+a_i-1$ estão vazios; se conseguir encontrar j, ele estaciona nesses lugares; se não, o procedimento termina. Caso todos os carros consigam estacionar, a n-upla $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ é *pacífica*. Caso contrário, não é.

Mostre que a quantidade de n-uplas pacíficas é

$$(a_1 + n)(a_1 + a_2 + n - 1) \ldots (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + 2).$$

PROBLEMA 14
Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo. Os pontos K, L, M, N estão sobre os lados AB, BC, CD, DA respectivamente e são tais que

$$\frac{AK}{KB} = \frac{DA}{BC}, \quad \frac{BL}{LC} = \frac{AB}{CD}, \quad \frac{CM}{MD} = \frac{BC}{DA}, \quad \frac{DN}{NA} = \frac{CD}{AB}.$$

As semirretas AB e DC se cortam no ponto E e as semirretas AD e BC se cortam no ponto F. O incírculo de AEF toca os lados AE em S e AF em T. O incírculo de CEF toca os lados CE em U e CF em V. Prove que se K, L, M, N são concíclicos então S, T, U, V são também concíclicos.

PROBLEMA 15
Seja $n \geq 3$ inteiro e k a quantidade de primos positivos menores ou iguais a n. É dado um subconjunto A de $S = \{2, 3, 4, \ldots, n-1, n\}$ com menos de k elementos, tal que nenhum elemento de A é múltiplo de outro elemento de A. Prove que existe um subconjunto B com k elementos de S que contém A e tal que nenhum elemento de B é múltiplo de outro elemento de B.

PROBLEMA 16
Sejam P, Q polinômios não constantes com coeficientes reais primos entre si. Prove que existem no máximo três números reais λ tais que $P + \lambda Q$ é o quadrado de um polinômio.