Primeira Lista de Preparação para a LVIII IMO
e XXVII Olimpíada Iberoamericana de Matemática
Nível III
Soluções

Prazo: 17/02/2017, 23:59 de Brasília

Álgebra

PROBLEMA 1

O algarismo mais à esquerda (na base decimal) dos números 4^n e 5^n são iguais. Prove que esse algarismo é 2 ou 4.

Solução

Seja k o algarismo mais à esquerda de 4^n e 5^n, no caso em que eles são iguais. Então $k \cdot 10^a < 4^n < (k+1) \cdot 10^a$ e $k \cdot 10^b < 5^n < (k+1) \cdot 10^b$ (nenhuma igualdade pode ocorrer pois 4^n não ter fator 5 e 5^n não tem fator 2). Elevando a segunda desigualdade ao quadrado e multiplicando obtemos $k^3 \cdot 10^{a+2b} < 100^n < (k+1)^3 \cdot 10^{a+2b} \iff k^3 < 10^{2n-a-2b} < (k+1)^3$, ou seja, deve existir alguma potência de 10 entre k^3 e $(k+1)^3$. A tabela a seguir mostra que isso só é possível para $k = 2$ ou $k = 4$:

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
k^3	1	8	27	64	125	256	343	256	729

Observação: Com o auxílio de um computador, encontramos $4^{11} = 4194304$ e $5^{11} = 48828125$; $4^{52} = 20282409603651670423947251286016$ e $5^{52} = 2220446049250313080847263336181640625$. 11 e 52 são os menores expoentes possíveis.

PROBLEMA 2

Encontre todos os pares (α, β) de reais positivos tais que

$$\lfloor \alpha \lfloor \beta x \rfloor \rfloor = \lfloor \beta \lfloor \alpha x \rfloor \rfloor$$

para todo x real.

Solução

Resposta: (α, α), *α real positivo, e* $(1/m, 1/n)$, *m, n inteiros positivos.*

Sejam $a = 1/\alpha$ e $b = 1/\beta$, de modo que a igualdade agora é

$$\left\lfloor \frac{\lfloor x/b \rfloor}{a} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor x/a \rfloor}{b} \right\rfloor.$$

Agora, vamos calcular quando o lado esquerdo é igual a um inteiro n. Para isso, devemos ter

$$n \le \frac{\lfloor x/b \rfloor}{a} < n+1 \iff na \le \lfloor x/b \rfloor < (n+1)a \iff \lceil na \rceil \le x/b < \lceil (n+1)a \rceil \iff b\lceil na \rceil \le x < b\lceil (n+1)a \rceil.$$

Assim, trocando a e b de lugar obtemos que a condição é equivalente a

$$b\lceil na \rceil = a\lceil nb \rceil, \quad n \in \mathbb{Z},$$

que, quando $\lceil nb \rceil \neq 0$, pode ser reescrita como

$$\frac{a}{b} = \frac{\lceil na \rceil}{\lceil nb \rceil}.$$

Se a e b são ambos inteiros, os tetos somem e a condição é válida. Suponha então, sem perdas, que a não é inteiro.

Sejam $A = \lceil a \rceil$ e $B = \lceil b \rceil$ (note que $B \ge 1$). Como $a < A$ e $(n+1)a - (na+1) < \lceil (n+1)a \rceil - \lceil na \rceil < (n+1)a + 1 - na \iff a - 1 < \lceil (n+1)a \rceil - \lceil na \rceil < a+1 \iff \lceil (n+1)a \rceil - \lceil na \rceil \in \{A-1, A\}$, existe k inteiro positivo tal que $\lceil na \rceil = nA$ para $n = 1, 2, \ldots, k-1$ e $\lceil ka \rceil = kA - 1$. Então para $n = 1$ temos $\frac{a}{b} = \frac{A}{B}$ e, para $2 \le n \le k-1$,

$$\frac{A}{B} = \frac{a}{b} = \frac{nA}{\lceil nb \rceil} \implies \lceil nb \rceil = nB.$$

Fazendo $n = k$, obtemos

$$\frac{A}{B} = \frac{kA - 1}{\lceil kb \rceil} \iff \lceil kb \rceil = kB - \frac{B}{A}.$$

Mas $\lceil kb \rceil \in \{kB - 1, kB\}$, logo $B = A \implies \frac{a}{b} = 1 \iff a = b$, ou seja, $\alpha = \beta$.

Desta forma, a, b são inteiros positivos ou $\alpha = \beta$.

PROBLEMA 3
Um polinômio é *realístico* se todos os seus coeficientes são reais. Sejam P e Q polinômios de coeficientes complexos tais que a composição $P \circ Q(x) = P(Q(x))$ é realística. Suponha que os coeficientes líder e independente de Q são ambos reais. Prove que P e Q são ambos realísticos.

Solução
Sejam $P(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j x^j$ e $Q(x) = \sum_{j=1}^{m} b_j x^j$. Olhando o coeficiente dominante de $P \circ Q$, que é $a_n b_m$, vemos que a_n é real.

Suponha que Q não é realístico e seja k o maior índice para o qual $b_k \notin \mathbb{R}$. Olhe para o coeficiente em $x^{m(n-1)+k}$ de $P \circ Q$: note que, sendo $k > 0$, não usamos o coeficiente de graus $n-1$ para baixo em P, ou seja, só olhamos para $a_n Q^n$. Esse coeficiente é $a_n b_m^{n-1} b_k + M$, em que M só tem coeficientes com índice maior do que k em Q e a_n. Sendo $a_n, b_m \neq 0$, b_k é real, absurdo.

Agora provamos que P é realístico. Para isso, suponha o contrário e seja ℓ o maior índice para o qual a_ℓ não é real. Olhe agora para o coeficiente em $x^{\ell m}$ em $P \circ Q$. Aparece $a_\ell b_m^\ell + N$, em que N só tem coeficientes de Q e coeficientes de índice maior do que ℓ em P. Com isso, a_ℓ é real, outro absurdo.

Combinatória

PROBLEMA 4
Em cada vértice de um prisma com bases n-agonais escrevemos o número 1 ou -1. Para que valores de n é possível fazer isso de modo que os produtos dos números em cada face sejam todos iguais a -1?

Solução
Resposta: n múltiplo de 4.

Considere as arestas laterais do prisma. O produto dos números nas suas extremidades é -1 ou 1. Para que os retângulos tenham produto -1, os produtos -1 e 1 devem se alternar, e portanto n é par. Além disso, as quantidades de -1's nas bases devem ser ambas ímpares, e somando temos que a quantidade total de -1's é par. Mas essa quantidade tem a mesma paridade que a quantidade de arestas laterais com produto -1, ou seja, $n/2$ é par. Deste modo, n deve ser múltiplo de 4.

Por outro lado, existe um exemplo para n múltiplo de 4. Sendo $A_1A_2\dots A_n$ e $B_1B_2\dots B_n$ as bases, com A_iB_i sendo as arestas laterais, os vértices com -1 podem ser os de índice ímpar de $A_1A_2\dots A_n$, exceto A_1, dando um total de $n/2-1$ (que é ímpar) -1's nessa base, e B_1. Os demais vértices recebem 1. É imediato que os produtos das faces são -1. Além disso, as arestas laterais alternam produtos 1 e -1, o que garante que as faces laterais tenham produto -1.

PROBLEMA 5
Aino pensou em um número N pertencente a $A = \{1, 2, \dots, 1001\}$, e Eino precisa adivinhar o número de Aino. Para isso, Eino escreve na lousa três listas, cada uma com subconjuntos distintos de A, e Aino diz para Eino as quantidades de subconjuntos na lousa de cada uma das listas que contêm N (ou seja, Aino diz para Eino uma tripla ordenada de números inteiros não negativos correspondentes às três listas de Eino). Um subconjunto pode aparecer em mais de uma lista.

Qual é a menor quantidade total de subconjuntos que Eino deve escrever na lousa para conseguir adivinhar o número de Aino, não importando quais são as respostas de Aino?

Solução
Resposta: 28.

Sejam a_1, a_2, a_3 as quantidades de subconjuntos em cada lista. Queremos minimizar $a_1 + a_2 + a_3$. Sabemos que há $(a_1+1)(a_2+1)(a_3+1)$ possibilidades de respostas para Eino (de 0 a a_i para cada lista). Então, para não haver dúvidas, devemos ter $(a_1+1)(a_2+1)(a_3+1) \geq 1001$. Usando médias, temos

$$1001 \leq (a_1+1)(a_2+1)(a_3+1) \leq \left(\frac{a_1+1+a_2+1+a_3+1}{3}\right)^3$$
$$\implies \frac{a_1+a_2+a_3}{3} + 1 \geq \sqrt[3]{1001} \iff a_1+a_2+a_3 \geq 28$$

Por uma grande sorte, $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13 = (6+1)(10+1)(12+1)$ e $6+10+12 = 28$. Então vamos mostrar um exemplo com uma lista de 12 subconjuntos, depois outra de 10 subconjuntos e outra com 6 subconjuntos.

Disponha os números de 1 a 1001 em um paralelepípedo $7 \times 11 \times 13$. Escreva na primeira lista os conjuntos dos números nas primeiras i camadas 7×11, $1 \leq i \leq 12$; na segunda lista, escreva os conjuntos dos números nas primeiras j camadas 7×13, $1 \leq j \leq 10$; na terceira lista, escreva os conjuntos dos números nas primeiras k camadas 11×13, $1 \leq k \leq 6$.

Note que se a primeira resposta é i, então o número escolhido está na camada $13-i$, pois ele está nas $i+1$ últimas camadas. Analogamente, sabemos que ele está na camada $11-j$ de 11 e na camada $7-k$ de 7, o que nos permite encontrar a casa onde o número está.

PROBLEMA 6
Na OBMlândia há uma quantidade finita de clubes de matemática. Quaisquer dois clubes de matemática têm pelo menos um membro em comum. Prove que é possível distribuir para os cidadãos da OBMlândia réguas e compassos de modo que somente uma pessoa recebe ambos e tal que cada clube tem à disposição pelo menos uma régua e pelo menos um compasso (mais precisamente, cada clube tem um membro que tem uma régua e um membro – talvez a mesma pessoa! – que tem um compasso).

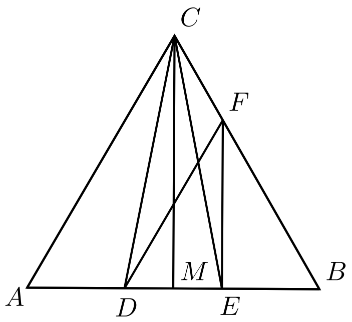
Solução
Seja C o clube com menos pessoas e dê a régua e o compasso para um de seus membros M. Os demais membros desse clube ganham um compasso cada e todos os demais cidadãos da OBMlândia recebem uma régua.

Suponha que essa distribuição não dê certo e considere um clube D que não tem régua ou não tem compasso. No primeiro caso, o clube D deve estar contido em C e não conter M, contradizendo a minimalidade de C. No segundo caso, o clube D tem um membro em comum com C, e portanto tem compasso, absurdo.

Geometria

PROBLEMA 7
Os pontos D e E trissectam o lado AB do triângulo equilátero ABC, com D entre A e E. O ponto F está sobre o lado BC e é tal que $CF = AD$. Calcule $\angle CDF + \angle CEF$.

Solução
Resposta: $30°$.



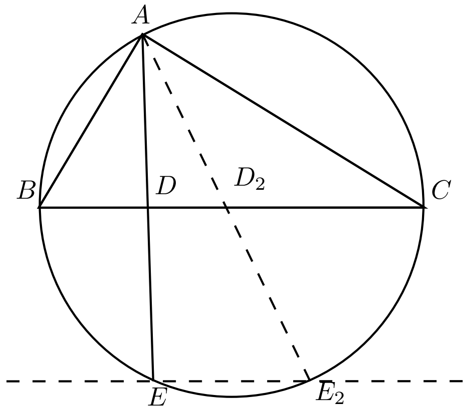
Como $CF = AD$, $DF \parallel AC$ e BDF é equilátero. Assim, $\angle CDF = \angle ACD$ e, sendo E ponto médio de BD, $EF \perp AB$. Sendo M o ponto médio de AB, temos $CM \parallel EF$, e $\angle CEF = \angle ECM = \angle MCD$. Deste modo,

$$\angle CDF + \angle CEF = \angle ACD + \angle MCD = \angle ACM = 30°.$$

PROBLEMA 8
No triângulo ABC, $BC = 1$. Sabe-se que existe um único ponto D sobre o lado BC tal que $DA^2 = DB \cdot DC$. Encontre os possíveis valores do perímetro de ABC.

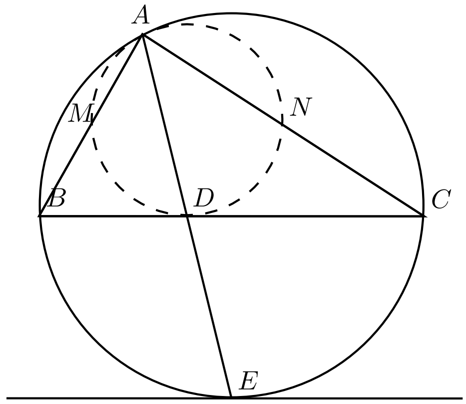
Solução
Resposta: somente $\sqrt{2} + 1$.

Seja E a segunda interseção da reta AD com o circuncírculo de ABC. Por potência de ponto, $DA \cdot DE = DB \cdot DC$, logo $DA = DE$.



Trace por E uma paralela a BC. Se essa reta corta o circuncírculo em $E_2 \neq E$, e AE_2 corta BC em D_2, por semelhança temos $AD_2 = D_2E_2$, e temos dois pontos D que satisfazem $AD^2 = BD \cdot CD$, contradição. Logo a reta corta o circuncírculo em um único ponto, ou seja, é tangente.

Agora considere a homotetia que leva E a D, que tem razão $1/2$. Essa homotetia leva o circuncírculo de ABC a um círculo tangente a BC, B ao ponto médio M de AB e C ao ponto médio N de AC.



Por potência de ponto, $BD^2 = BM \cdot BA = AB^2/2 \implies AB = BD\sqrt{2}$ e analogamente $AC = CD\sqrt{2}$. Logo o perímetro de ABC é $AB + BC + BC = \sqrt{2}(BD + CD) + BC = BC(\sqrt{2} + 1) = \sqrt{2} + 1$.

Solução
Outra solução é fazer contas. Sabemos da relação de Stewart que $BC \cdot (BD \cdot CD + AD^2) = AB^2 \cdot CD + AC^2 \cdot BD$. Assim, como $AD^2 = BD \cdot CD$, sendo $x = BD$, $a = BC$, $b = CA$ e $c = AB$, temos

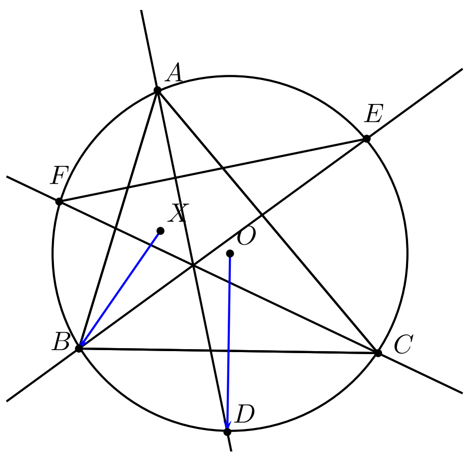
$$2ax(a - x) = c^2(a - x) + b^2x \iff 2ax^2 - (2a^2 - b^2 + c^2)x + ac^2 = 0.$$

Como $P = c^2/2 > 0$, a equação obtida tem raízes de mesmo sinal. Assim, $S > 0$ e $\Delta = 0$, e a raiz dupla é $x = \sqrt{P} = b/\sqrt{2}$, de modo que $c = x\sqrt{2} \iff AB = BD\sqrt{2}$. Analogamente (fazendo a mesma equação para $y = CD$) obtemos $AC = CD\sqrt{2}$, e concluímos como na solução anterior.

PROBLEMA 9
Seja ABC um triângulo com incentro I e circuncentro $O \neq I$. Para cada ponto X no interior de ABC seja $f(X)$ a soma das distâncias de X às retas AB, BC e CA. Prove que se P e Q são pontos no interior de ABC tais que $f(P) = f(Q)$ então $PQ \perp OI$.

Solução
Adote O como o centro de um sistema de coordenadas e suponha, sem perdas, que o circunraio de ABC é 1. Sejam D, E, F os pontos médios dos arcos BC, CA, AB que não contêm os outros vértices. Sendo X um ponto no interior de ABC, a distância de X a BC é igual à projeção de BX (ou de CX) sobre $\overrightarrow{OD}$, que é perpendicular a BC. Sendo $OD = 1$, essa projeção é o produto escalar $\overrightarrow{XB} \cdot \overrightarrow{OD} = (B - X) \cdot D$. Desta forma,

$$f(X) = (B - X) \cdot D + (C - X) \cdot E + (A - X) \cdot F = B \cdot D + C \cdot E + A \cdot F - X \cdot (D + E + F).$$



Note que o ângulo entre AD e EF é $\frac{1}{2}(m(AE) + m(DF)) = \frac{1}{4}(m(AC) + m(BC) + m(AB)) = 90°$. Assim, o incentro I, que é a interseção de AD, BE e CF, é o ortocentro de DEF, ou seja, $I = D + E + F$. Logo

$$f(X) = B \cdot D + C \cdot E + A \cdot F - X \cdot I.$$

Deste modo,

$$f(P) = f(Q) \iff P \cdot I = Q \cdot I \iff (P - Q) \cdot I = 0 \iff \overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{OI}.$$

Teoria dos Números

PROBLEMA 10
Encontre todos os pares de inteiros positivos distintos $\{a, b\}$ tais que $a + b$ e $ab + 1$ são ambos potências de 2.

Solução
Resposta: $\{1, 2^m - 1\}$, $m \geq 1$; $\{2^m - 1, 2^m + 1\}$, $m \geq 1$.

Se $a = 1$ ou $b = 1$ então $a + b = ab + 1$, então $\{1, 2^m - 1\}$ é uma solução. Assim, $a, b \geq 2$.

Sendo $b = 2^k - a$, temos $ab + 1 = a(2^k - a) + 1 = 2^\ell \implies a^2 - 2^k a + 2^\ell - 1 = 0$. O discriminante dessa equação é

$$\Delta = (-2^k)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2^\ell - 1) = 2^{2k} - 2^{\ell+2} + 4.$$

Como $a + b \geq 4$, $k > 0$ e podemos dividir tudo por 4, de modo que queremos que

$$2^{2k-2} - 2^\ell + 1 = t^2 \iff 2^\ell(2^{2k-2-\ell} - 1) = t^2 - 1 = (t - 1)(t + 1).$$

Primeiro, note que $2k - 2 \geq \ell$. Se $2k - 2 = \ell$ então $t = 1$, e $a = 2^{k-1} \pm 1$ e $b = 2^{k-1} \mp 1$, de modo que $\{a, b\} = \{2^m - 1, 2^m + 1\}$. Se $2k - 2 > \ell$, então, sendo $\ell > 0$ e $\text{mdc}(t - 1, t + 1) = \text{mdc}(2, t + 1) = 2$, concluímos que $2^{\ell-1}$ divide $t - 1$ ou $t + 1$. Assim, $t \geq 2^{\ell-1} - 1 \iff t^2 \geq 2^{2\ell-2} - 2^\ell + 1$. Além disso, $ab + 1 - (a + b) = (a - 1)(b - 1) > 0 \implies \ell > k$. Logo $t^2 > 2^{2k-2} - 2^\ell + 1 = t^2$, absurdo. Assim, não há novas soluções.

PROBLEMA 11
Encontre todos os inteiros positivos n que podem ser representados na forma $n = \text{mmc}(a, b) + \text{mmc}(b, c) + \text{mmc}(c, a)$ para a, b, c inteiros positivos.

Solução
Resposta: n pode ser qualquer inteiro, exceto potências de 2.

Escolha $a = k$ e $b = c = 1$. Então $n = 2k+1$, e todo ímpar maior do que 1 pode ser representado. Multiplicar a, b, c por 2^t multiplica todos os mmc's por 2^t, e obtemos todos os inteiros positivos que não são potências de 2.

Agora, suponha que alguma potência de 2 pode ser representada nessa forma e seja 2^m a menor dessas potências. Primeiro veja que a soma dos mmc's é pelo menos 3, logo $m \geq 2$. Se todos os números a, b, c forem ímpares, todos os mmc's são ímpares, o que não é possível. Se só um dos números a, b, c é par, obtemos dois mmc's pares e um ímpar, outro absurdo. Logo pelo dois deles são pares. Se todos forem pares, temos $\text{mmc}(a/2, b/2) + \text{mmc}(b/2, c/2) + \text{mmc}(c/2, a/2) = 2^{m-1}$, contradizendo a minimalidade de m, absurdo. Então exatamente dois, digamos, a, b são pares, e c é ímpar. Logo $\text{mmc}(a, b) + \text{mmc}(a, c) + \text{mmc}(b, c) = 2\,\text{mmc}(a/2, b/2) + 2\,\text{mmc}(a/2, c) + 2\,\text{mmc}(b/2, c)$, e obtemos 2^{m-1} usando $a/2, b/2, c$, outro absurdo. Assim, potências de 2 não podem ser representados.

PROBLEMA 12
Sejam $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ e $a_n = 4a_{n-1} - a_{n-2}$ para $n \geq 2$. Encontre um fator primo ímpar de a_{500}.

Solução
A equação característica dessa recursão linear homogênea é $x^2 - 4x + 1 = 0$, que tem raízes $\alpha = 2 + \sqrt{3}$ e $\alpha^{-1} = 2 - \sqrt{3}$. Com isso, $a_n = A(2 + \sqrt{3})^n + B(2 - \sqrt{3})^n$. Resolvendo o sistema substituindo $n = 0$ e $n = 1$ obtemos $A = B = 1/2$, de modo que

$$a_n = \frac{\alpha^n + \alpha^{-n}}{2}.$$

Para n ímpar, sendo m um fator ímpar de n e $t = n/m$ temos

$$a_n = \frac{1}{2}(\alpha^{tm} + \alpha^{-tm}) = \frac{1}{2}(\alpha^t + \alpha^{-t}) \sum_{i=0}^{m} \alpha^{t(m-i)} \alpha^{-ti} = a_t \cdot \sum_{i=0}^{m} \alpha^{t(m-2i)} = 2a_t \sum_{i=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} a_{m-2i},$$

ou seja, $a_{n/m} \mid a_n$.

Logo $a_4 \mid a_{500}$ e basta encontrar um fator primo de a_5. Calculando, temos $a_2 = 4 \cdot 2 - 1 = 7$, $a_3 = 4 \cdot 7 - 2 = 26$ e $a_4 = 4 \cdot 26 - 7 = 97$. Assim, um fator primo ímpar de a_{500} é 97.

Observação: os sete menores fatores primos de a_{500}, um número de 286 *algarismos, são* 79, 97, 1999, 7663, 444001, 10633999, 17927599.

Problemas gerais

PROBLEMA 13

Considere n carros $C_1, C_2, \dots, C_n$ de tamanhos $a_1, a_2, \dots, a_n$, todos inteiros, e um estacionamento de largura $s = a_1+a_2+\cdots+a_n$, com posições marcados de 1 a s. Cada carro tem um lugar favorito c_i. Os carros, começando por C_1, depois C_2, e assim por diante, estacionam da seguinte forma: cada carro C_i procura o menor lugar $j \ge c_i$ tal que os lugares $j, j+1, \dots, j+a_i-1$ estão vazios; se conseguir encontrar j, ele estaciona nesses lugares; se não, o procedimento termina. Caso todos os carros consigam estacionar, a n-upla $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ é *pacífica.* Caso contrário, não é.

Mostre que a quantidade de n-uplas pacíficas é

$$(a_1+n)(a_1+a_2+n-1)\dots(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+2).$$

Solução

Seja $M = a_1+a_2+\cdots+a_n+1$. Consideramos que as vagas estão em um círculo com $M+1$ vagas, de modo que todos os carros conseguem estacionar e sobra um espaço. Provaremos que, sendo N a quantidade de n-uplas pacíficas, essa quantidade é

$$M \cdot N = (a_1+n)(a_1+a_2+n-1)\dots(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+1),$$

o que termina o problema.

O primeiro carro C_1 pode escolher seu lugar de M maneiras. Depois disso, apague as marcas das vagas e coloque $n+1$ divisórias, de modo que cada um dos $n+1$ intervalos obtidos tenha um carro ou o espaço vazio. As divisórias são móveis (imagine-as com rodinhas!).

Agora considere o segundo carro. Ele pode ter escolhido algum lugar que C_1 já ocupou, o que pode acontecer de y_1 maneiras, e C_2 ocupar o próximo lugar, ou qualquer um dos outros n intervalos e ele vai no intervalo desejado, num total de y_1+n possibilidades. O carro C_3 faz o mesmo: ou ele escolheu um dos y_1+y_2 lugares ocupados por C_1 ou C_2 ou ele escolhe um $n-1$ intervalos, dando y_1+y_2+n-1 possibilidades. Com isso, ele tem y_1+y_2+n-1 possibilidades. Isso é generalizável, e temos $y_1+y_2+\cdots+y_{i-1}+n-i+2$ possibilidades para o carro i, $i = 2, 3, \dots, n$. Cada carro pode "empurrar" os outros carros e divisórias para caber na sua vaga. No final do procedimento, rotacione todos os carros até que C_1 ocupe sua vaga original, fixando a configuração, incluindo o espaço vazio. Com isso, há

$$(a_1+n)(a_1+a_2+n-1)\dots(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+1)$$

maneiras de estacionar os carros circularmente.

Vamos provar que essa quantidade também é $M \cdot N$. Uma configuração reta original corresponde a uma circular em que a vaga vazia é M, pois nenhum carro da configuração reta tem M como vaga favorita e, reciprocamente, nenhum carro passaria por M sem estacionar lá se não for para a sua vaga favorita (em outras palavras, se M ficar vazio, é porque todos conseguiram estacionar).

Agora, como podemos girar as configurações circulares como quisermos, as quantidades de configurações com uma determinada casa livre são iguais. Logo a quantidade de configurações circulares também é $M \cdot N$, e o problema acabou.

PROBLEMA 14

Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo. Os pontos K, L, M, N estão sobre os lados AB, BC, CD, DA respectivamente e são tais que

$$\frac{AK}{KB} = \frac{DA}{BC}, \quad \frac{BL}{LC} = \frac{AB}{CD}, \quad \frac{CM}{MD} = \frac{BC}{DA}, \quad \frac{DN}{NA} = \frac{CD}{AB}.$$

As semirretas AB e DC se cortam no ponto E e as semirretas AD e BC se cortam no ponto F. O incírculo de AEF toca os lados AE em S e AF em T. O incírculo de CEF toca os lados CE em U e CF em V. Prove que se K, L, M, N são concíclicos então S, T, U, V são também concíclicos.

Solução

Sejam $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ e $DA = d$. Das condições temos

$$AK = \frac{ad}{b+d}, \quad BK = \frac{ab}{b+d}, \quad BL = \frac{ab}{a+c}, \quad CL = \frac{bc}{a+c},$$
$$CM = \frac{bc}{b+d}, \quad DM = \frac{cd}{b+d}, \quad DN = \frac{cd}{a+c}, \quad AN = \frac{ad}{a+c}.$$

Se $a+c > b+d$, então $AK > AN$, de modo que $\angle AKN < \angle KNA$. Analogamente,

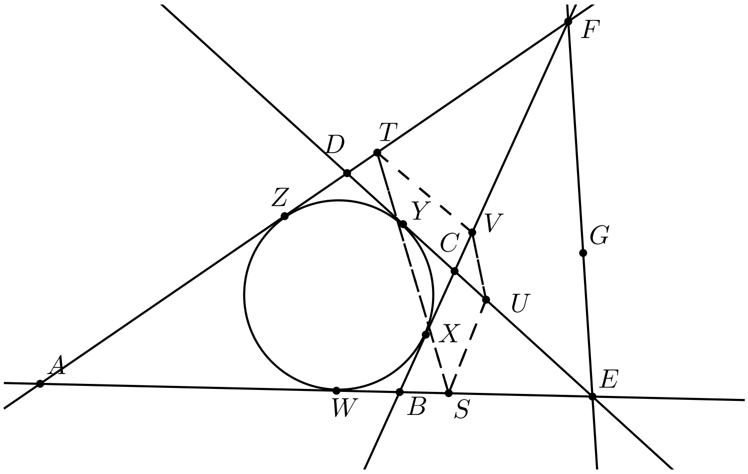
$$\angle BKL < \angle KLB, \quad \angle CML < \angle MLC \quad \text{e} \quad \angle DMN < \angle MND.$$

Logo

$$2\pi - \angle AKN - \angle BKL - \angle CML - \angle DMN > 2\pi - \angle KNA - \angle KLB - \angle MLC - \angle MND,$$

ou seja, $\angle NML + \angle NKL > \angle MNK + \angle MKL$, o que contradiz K, L, M, N sendo concíclicos.

Portanto $a + c \leq b + d$ e, analogamente, $a + c \geq b + d$, provando que $a + c = b + d$, ou seja, $ABCD$ é circunscritível.



Sejam W, X, Y, Z os pontos de tangência do incentro de $ABCD$ nos lados AB, BC, CD, DA, respectivamente. Temos

$$AE - AF = WE - ZF = EY - FX = EC - CF.$$

Agora, sejam G e H os pontos de tangência dos incírculos de AEF e CEF em EF, respectivamente. Temos também

$$2(FG - FH) = (EF + AF - AE) - (EF + CF - CE) = (AF - AE) - (CF - CE) = 0,$$

ou seja, $G = H$.

Temos $ES = EG = EU$ e $FT = FG = FV$, logo

$$\angle EUS = \frac{\pi - \angle UES}{2} = \frac{\angle A + \angle ADC}{2}, \quad \angle FTV = \frac{\pi - \angle TFV}{2} = \frac{\angle A + \angle ABC}{2}.$$

Sendo $\angle ATS = \frac{1}{2}(\pi - \angle A)$ e $\angle CUV = \frac{1}{2}(\pi - \angle BCD)$,

$$\begin{aligned}\angle VTS + \angle VUS &= (\pi - \angle FTV - \angle ATS) + (\angle CUV + \pi - \angle EUS) \\ &= \left(\pi - \frac{\angle A + \angle ABC}{2} - \frac{\pi - \angle A}{2}\right) + \left(\frac{\pi - \angle BCD}{2} + \pi - \frac{\angle A + \angle ADC}{2}\right) = \pi,\end{aligned}$$

de modo que S, T, U, V são concíclicos.

PROBLEMA 15

Seja $n \geq 3$ inteiro e k a quantidade de primos positivos menores ou iguais a n. É dado um subconjunto A de $S = \{2, 3, 4, \ldots, n-1, n\}$ com menos de k elementos, tal que nenhum elemento de A é múltiplo de outro elemento de A. Prove que existe um subconjunto B com k elementos de S que contém A e tal que nenhum elemento de B é múltiplo de outro elemento de B.

Solução

Para cada inteiro $m > 1$, seja $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$ sua fatoração em primos e defina $f(m) = \max\{p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \ldots, p_k^{\alpha_k}\}$. Como A tem menos de k elementos, existe um primo $p \leq n$ que não divide $f(a)$ para $a \in A$. Seja α tal que $p^\alpha \leq n < p^{\alpha+1}$. Provemos que $p^\alpha \nmid a$ e $a \nmid p^\alpha$. No segundo caso, a só tem fator p, o que é impossível pois a é potência de p e $f(a) = a$. No primeiro caso, $f(a) = q^\beta$ com $q \neq p$ e $q^\beta > p^\alpha$. Assim, $a \geq p^\alpha q^\beta > p^{2\alpha} \geq p^{\alpha+1} > n$, contradição.

Isso implica $p^\alpha \notin A$, e além disso, podemos colocar p^α em A sem que um número divida o outro em A. Podemos continuar a fazer isso até ter todos os primos entre $f(a)$, e temos um conjunto B que contém A, tem k elementos e não dois números distintos tais que um divide o outro.

PROBLEMA 16

Sejam P, Q polinômios não constantes com coeficientes reais primos entre si. Prove que existem no máximo três números reais λ tais que $P + \lambda Q$ é o quadrado de um polinômio.

Solução
Vamos resolver o problema para polinômios com coeficientes complexos (para a gente não se preocupar com o quadrado de um real ser não negativo). Basta provar que se existem quatro razões distintas $[\alpha:\beta]\neq[0:0]$ tais que $\alpha P+\beta Q$ é o quadrado de um polinômio, então P e Q são constantes. Sejam $[\alpha_i:\beta_i]$ as razões, $i=1,2,3,4$. Então, supondo sem perdas que a soma dos graus de P e Q é mínimo e positivo,

$$\begin{aligned}\alpha_1P+\beta_1Q&=A^2\\ \alpha_2P+\beta_2Q&=B^2\\ \alpha_3P+\beta_3Q&=C^2\\ \alpha_4P+\beta_4Q&=D^2\end{aligned}$$

Note que podemos multiplicar cada equação por qualquer número não nulo. Podemos tomar $P_1=\alpha_1P+\beta_1Q$, $Q_1=k(\alpha_2P+\beta_2Q)$, $\alpha_3P+\beta_3Q=\ell(P_1-Q_1)$: fazemos $\ell\alpha_1-k\ell\alpha_2=\alpha_3$ e $\ell\beta_1-k\ell\beta_2=\beta_3$, o que é possível pois $\frac{\alpha_1-k\alpha_2}{\beta_1-k\beta_2}=\frac{\alpha_3}{\beta_3}=t\iff k(\alpha_2-t\beta_2)=\alpha_1-t\beta_1$, que não dá certo só se $\alpha_2-t\beta_2=0$. Mas esse caso só ocorre quando $\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2=0\iff[\alpha_2:\beta_2]=[\alpha_3:\beta_3]$, absurdo. Aí podemos escolher k para ajustar a razão e ℓ para ajustar os valores. Finalmente, podemos trocar $\alpha_4P+\beta_4Q$ por $mP_1-mn^2Q_1$ também (como estamos em complexos, n^2 pode ter qualquer sinal). Em resumo, podemos supor sem perdas que as razões são $[1:0]$, $[0:1]$, $[1:-1]$ e $[1:-n^2]$ (o que pode ser demonstrado usando um pouco de geometria analítica projetiva também!).

Assim, fazendo as substituições $P_1=A^2$ e $Q_1=B^2$, ajustando as multiplicações e multiplicando uns quadrados por constantes, obtemos $A^2-B^2=C^2$ e $A^2-n^2B^2=D^2$. Fatorando temos $(A-B)(A+B)=C^2$ e $(A-nB)(A+nB)=D^2$. Agora, como $\mathrm{mdc}(A,B)=1$, $A-B$, $A+B$, $A-nB$ e $A+nB$ são quadrados, e com razões diferentes. Em outras palavras, A e B, que têm grau igual às metades dos graus de P e Q, têm a mesma propriedade, contradizendo a minimalidade da soma dos graus. Logo o problema está resolvido.