LVII Olimpíada Internacional e XXXI Olimpíada Iberoamericana
Quarto Teste de Seleção
16 de abril de 2016

Instruções:

- Não resolva mais de uma questão por folha. Escreva seu nome em cada folha que usar. Entregue também o rascunho, pois ele pode ser utilizado a seu favor na correção.
- É proibido o uso de calculadora ou computador. É permitido o uso de régua, esquadro e compasso.
- **A primeira página da sua solução de cada um do(s) problema(s) de geometria dessa prova deve ser somente a figura do problema feita com régua e compasso. Caso isso não aconteça, sua pontuação máxima no problema será 8 de 10 pontos.**
- Tudo o que você escrever deve ser justificado.
- Todas as questões têm o mesmo valor.
- Duração da prova: 5 horas.
- **Não divulgue o conteúdo dessa prova até julho de 2016! Alguns dos problemas foram retirados do Banco da IMO 2015, que deve permanecer secreto até essa data.**

PROBLEMA 1
Para cada inteiro positivo n, determine os algarismos das unidades e das centenas da representação decimal do número
$$\frac{1+5^{2n+1}}{6}.$$

PROBLEMA 2
Determine todas as funções $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ para as quais a igualdade
$$f(x - f(y)) = f(f(x)) - f(y) - 1$$
é verdadeira para quaisquer $x, y \in \mathbb{Z}$.

PROBLEMA 3
Seja ABC um triângulo retângulo em C com $CA < CB$, e seja H o pé da altura traçada por C. Um ponto D é escolhido no interior do triângulo CBH de forma que CH bisecta AD. Seja P o ponto de interseção entre as retas BD e CH. Seja ω o semicírculo de diâmetro BD que intersecta o segmento CB em um ponto interior. Uma reta passando por P é tangente a ω em Q. Prove que as retas CQ e AD intersectam-se sobre ω.

PROBLEMA 4
Seja $\mathcal{S}$ um conjunto não vazio de inteiros positivos. Dizemos que um inteiro positivo n é *picante* se possui uma representação única como soma de um número ímpar de elementos distintos de $\mathcal{S}$. Prove que existem infinitos inteiros positivos que **NÃO** são picantes.