LVII Olimpíada Internacional e XXXI Olimpíada Iberoamericana
Terceiro Teste de Seleção
19 de março de 2016

INSTRUÇÕES:

- Não resolva mais de uma questão por folha. Escreva seu nome em cada folha que usar. Entregue também o rascunho, pois ele pode ser utilizado a seu favor na correção.
- É proibido o uso de calculadora ou computador. É permitido o uso de régua, esquadro e compasso.
- **A primeira página da sua solução de cada um do(s) problema(s) de geometria dessa prova deve ser somente a figura do problema feita com régua e compasso. Caso isso não aconteça, sua pontuação máxima no problema será 8 de 10 pontos.**
- Tudo o que você escrever deve ser justificado.
- Todas as questões têm o mesmo valor.
- Duração da prova: 5 horas.
- **Não divulgue o conteúdo dessa prova até julho de 2016! Alguns dos problemas foram retirados do Banco da IMO 2015, que deve permanecer secreto até essa data.**

PROBLEMA 1
Encontre todas as funções f dos inteiros não negativos nos inteiros não negativos tais que

$$f(a+b) = f(a) + f(b) + f(c) + f(d)$$

para todos a, b, c, d inteiros não negativos tais que $2ab = c^2 + d^2$.

PROBLEMA 2
Dado um conjunto A de inteiros positivos, uma partição de A em A_1 e A_2 (ou seja, tal que $A_1 \cup A_2 = A$ e $A_1 \cap A_2 = \emptyset$) é *sebosa* quando o mínimo múltiplo comum dos elementos de A_1 é igual ao máximo divisor comum dos elementos de A_2. Encontre o menor valor de n para o qual existe um conjunto com n elementos com exatamente 2016 partições sebosas.

PROBLEMA 3
Sejam m e n inteiros positivos tais que $m > n$. Defina $x_k = \frac{m+k}{n+k}$ para $k = 1, 2, \ldots, n+1$. Prove que se todos os números $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ são inteiros então $x_1 x_2 \ldots x_{n+1} - 1$ tem um divisor primo ímpar.

PROBLEMA 4
Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo e P, Q, R e S pontos sobre os lados AB, BC, CD e DA, respectivamente. Os segmentos de reta PR e QS se cortam no ponto O. Suponha que $APOS$, $BQOP$, $CROQ$ e $DSOR$ são circunscritíveis. Prove que as retas AC, PQ e RS têm um ponto em comum ou são paralelas duas a duas.