LVII Olimpíada Internacional e XXXI Olimpíada Iberoamericana
Primeiro Teste de Seleção
27 de fevereiro de 2016

INSTRUÇÕES:

- Não resolva mais de uma questão por folha. Escreva seu nome em cada folha que usar. Entregue também o rascunho, pois ele pode ser utilizado a seu favor na correção.
- É proibido o uso de calculadora ou computador. É permitido o uso de régua, esquadro e compasso.
- **A primeira página da sua solução de cada um do(s) problema(s) de geometria dessa prova deve ser somente a figura do problema feita com régua e compasso. Caso isso não aconteça, sua pontuação máxima no problema será 8 de 10 pontos.**
- Tudo o que você escrever deve ser justificado.
- Todas as questões têm o mesmo valor.
- Duração da prova: 5 horas.
- **Não divulgue o conteúdo dessa prova até julho de 2016! Alguns dos problemas foram retirados do Banco da IMO 2015, que deve permanecer secreto até essa data.**

PROBLEMA 1
Seja ABC um triângulo acutângulo com ortocentro H. Seja G o ponto tal que o quadrilátero $ABGH$ seja um paralelogramo. Seja I o ponto sobre a reta GH tal que AC bissecta o segmento HI. Suponha que a reta AC corta o circuncírculo do triângulo CGI em C e J. Prove que $IJ = AH$.

PROBLEMA 2
Sejam a e b inteiros positivos tais que $a!\,b!$ é múltiplo de $a! + b!$. Prove que $3a \geq 2b + 2$.

PROBLEMA 3
Seja n um inteiro positivo. Dois jogadores, Uéslei e Seu Fadão, participam de um jogo em que eles escolhem, alternadamente, inteiros positivos menores ou iguais a n. As regras são as seguintes:

(i) Cada jogador não pode escolher um número que já foi escolhido antes por qualquer um dos jogadores.

(ii) Cada jogador não pode escolher um número que seja consecutivo (sucessor ou antecessor) de algum número que já foi escolhido antes por ele mesmo; ou seja, a partir do momento em que um jogador escolhe um número a ele não pode escolher mais nem $a - 1$ e nem $a + 1$.

(iii) O jogo termina empatado se todos os números de 1 a n foram escolhidos; caso contrário, o jogador que não puder escolher um número perde o jogo.

Uéslei começa o jogo. Para cada valor de n, determine quem tem estratégia vencedora ou se o jogo termina em empate.

PROBLEMA 4
Suponha que uma sequência $a_1, a_2, \ldots$ de reais positivos satisfaz

$$a_{k+1} \geq \frac{ka_k}{a_k^2 + (k-1)}$$

para todo inteiro positivo k. Prove que

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq n$$

para todo $n \geq 2$.