Problemas estranhos de geometria

O título original iria ser "geometria combinatória", mas notei que muitos dos problemas abordados e técnicas a serem mostradas aqui nada tem de Combinatória. De fato, os meus problemas favoritos daqui não têm Combinatória alguma!

Eventualmente vai aparecer um pouco de Combinatória. Só porque alguns problemas não usam suas técnicas não quer dizer que Combinatória vai deixar de aparecer em Geometria.

1. Onde estão os pontos?

Na grande maioria dos problemas de Geometria, o primeiro passo é fazer uma figura que representasse bem a situação. E se isso não possível? E se não for possível nem mesmo desenhar uma figura?

Nesses casos, se não podemos dizer onde estão exatamente os pontos, nós pelo menos procuramos *suas possíveis posições*. Sendo um pouco mais específico, verificamos *em que região ou regiões está o ponto*.

Exemplo 1.1.

(Ibero 2007, Problema 6) Seja $\mathcal{F}$ a família de todos os hexágonos convexos H que satisfazem as seguintes condições:

(a) os lados opostos de H são paralelos;

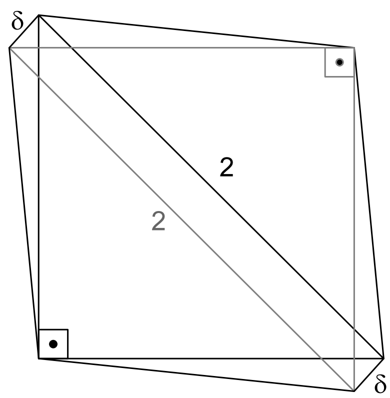
(b) quaisquer três vértices de H podem ser cobertos com uma faixa de largura 1.

Determine o menor número real ℓ tal que cada um dos hexágonos da família $\mathcal{F}$ pode ser coberto com uma faixa de largura ℓ.

Nota: Uma faixa de largura ℓ é a região do plano compreendida entre duas retas paralelas que estão à distância ℓ (incluindo ambas as retas paralelas).

Resolução

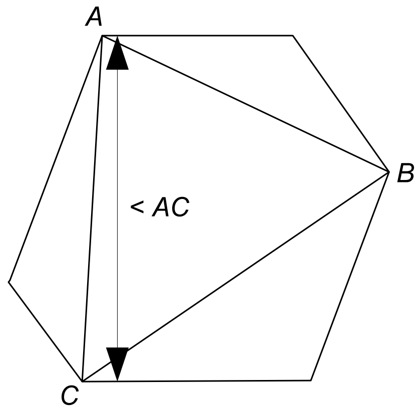
A primeira impressão é de que $\ell = 1$, mas não seria sem graça se fosse isso mesmo? A verdade é que $\ell = \sqrt{2}$. Basta tomar "quase-quadrados":



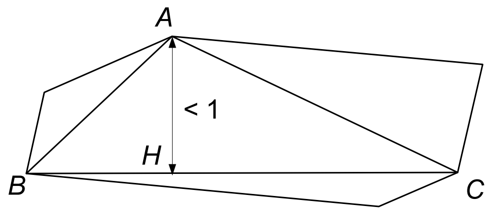
Note que se $\ell < \sqrt{2}$ então existe ϵ tal que $\ell = \sqrt{2} - \epsilon$. Basta tomar δ suficientemente pequeno para que a faixa de largura $\sqrt{2} - \epsilon$ não cubra o "quase-quadrado" correspondente.

Vamos provar que $\ell = \sqrt{2}$ é suficiente para cobrir todos os hexágonos de $\mathcal{F}$. Note que, para tanto, basta mostrar que todo hexágono de $\mathcal{F}$ tem algum par de lados opostos paralelos com distância menor ou igual a $\sqrt{2}$.

Seja H um hexágono de $\mathcal{F}$. Considere um triângulo ABC formado por vértices alternados de H. Note que se algum dos lados de ABC é menor ou igual a $\sqrt{2}$, uma faixa de $\sqrt{2}$ é suficiente para cobrir H, pois a distância entre cada par de lados opostos de H é menor ou igual a cada um dos lados de ABC.



Assim, suponha que todos os lados de ABC são maiores do que $\sqrt{2}$ e que a sua menor altura seja relativa a A. Isto quer dizer que a distância de A à reta BC é menor ou igual a 1. Com isso, podemos mostrar que o ângulo $\angle BAC$ é obtuso, pois, sendo H o pé da altura relativa a A, $\cos \angle HAB = \frac{AH}{AB} < \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos 45^\circ \implies \angle HAB > 45^\circ$ e, analogamente, $\angle HAC > 45^\circ$.

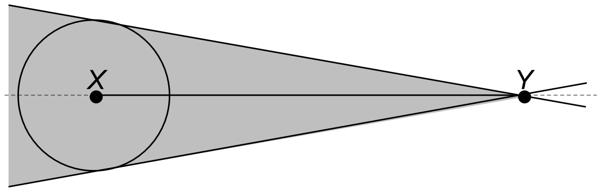


A nossa meta agora é descobrir onde pode estar o vértice A', oposto a A em H. Para isso, vamos estudar a condição (b) do enunciado. Note que ela é equivalente a dizer que todo triângulo determinado por vértices de H tem sua menor altura menor ou igual a 1.

Suponhamos, então, que sabemos a posição de dois vértices X e Y do hexágono H e queiramos saber onde poderiam estar os outros vértices de H. Seja Z um desses vértices. O interessante é que não sabemos *qual* é a menor altura, então devemos pensar nas três possibilidades (que na verdade são duas, já que duas delas são análogas):

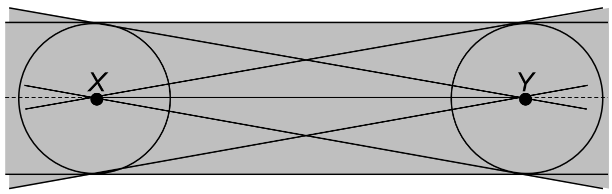
- A menor altura é relativa a Z. Então a distância de Z a XY é menor ou igual a 1. Sendo o conjunto dos pontos a uma distância fixada de uma reta igual a um par de retas paralelas, concluímos que Z pode estar na faixa formada por duas retas r e s a uma distância 1 de XY, excetuando a própria reta XY:

- A menor altura é relativa a X. Então a distância de X a YZ é menor ou igual a 1. Agora temos uma situação mais interessante, pois o ponto variável é Z; como medir a distância de um ponto fixado a uma reta variável? O truque aqui é considerar um círculo C de raio 1 com centro em X. Se a reta é tangente a C, então a distância de X a essa reta é 1; se for secante, é menor que 1; se for exterior, é maior que 1. Considerando ainda que as retas em questão devem passar pelo outro ponto fixo Y, temos a nossa resposta:



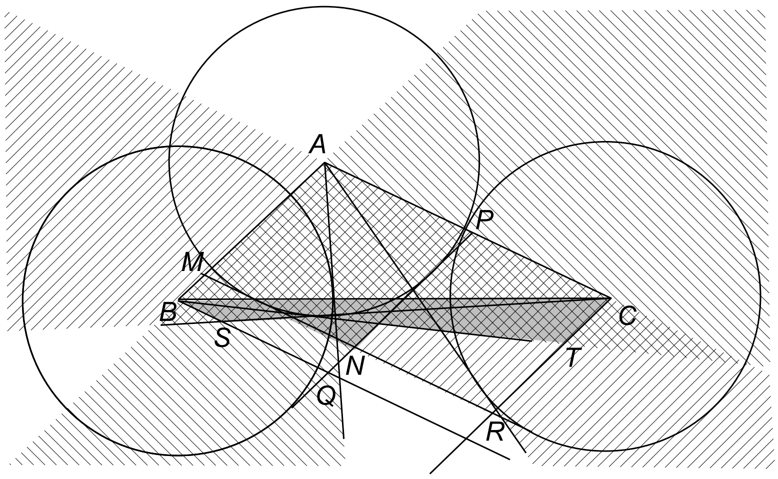
- A menor altura é relativa a Y. Esse caso é análogo ao anterior.

Assim, dados os pontos X e Y do hexágono, os demais vértices pertencem à região destacada na figura a seguir:



Para facilitar, chamaremos tal região de *XY-região*.

Com isso, podemos continuar o problema. Queremos encontrar as possíveis posições do ponto A', oposto a A no hexágono. Ele deve pertencer à AB-região e à AC-região, ou seja, na interseção dessas duas regiões. Além disso, como o hexágono é convexo, C e o vértice C', oposto a C, estão em lados opostos em relação a AB e AC' é paralelo a $A'C$, A' também pertence à região delimitada por $CR \parallel AB$, BC e, analogamente, $BQ \parallel AC$.



Se A' está no interior do ângulo $\angle CBT$, então a distância de A ao lado $A'B$ é menor ou igual a 1 e é possível cobrir H com uma faixa de largura $1 < \sqrt{2}$, pois a distância entre $A'B$ e o lado oposto, que contém A, é menor ou igual a 1; da mesma forma, se A' está no interior do ângulo $\angle BCS$, a distância de A ao lado $A'C$ é menor ou igual a 1 e é possível cobrir H com uma faixa de largura 1. Caso contrário, $AA' < \sqrt{}$, pois $\angle MAP > 90°$, e é possível cobrir H com uma faixa de largura $AN < \sqrt{2}$.

Na verdade, pode-se provar que esse último caso não pode ocorrer: basta considerar o maior entre os ângulos $\angle A'AB$ e $\angle A'AC$ e provar (por eliminação, e usando o fato de que o seno de um ângulo maior do que $45°$ é maior do que $\sqrt{2}/2$) que a distância de A a $A'B$ ou $A'C$ (o que participar do maior ângulo) é menor ou igual a 1, considerando o triângulo $AA'B$ (ou $AA'C$). ∎

Exercícios

01. (Hungria 1998) Seja P um polígono convexo com lados de medidas inteiras e perímetro ímpar. Prove que a área de P é maior ou igual a $\sqrt{3}/4$.

02. (Cone Sul 1996, Problema 6) Achar todos os números inteiros $n \geq 3$ tais que exista um conjunto S_n formado por n pontos do plano que satisfaçam as duas condições seguintes:

(1) Três pontos quaisquer não são colineares.

(2) Nenhum ponto se encontra no interior do círculo cujo diâmetro tem por extremos dois pontos quaisquer de S_n.

NOTA: Os pontos da circunferência não são considerados interiores ao círculo.

03. (OBM 2005, Nível 3, Problema 3) Dizemos que um quadrado está contido em um cubo quando todos os seus pontos estão nas faces ou no interior do cubo. Determine o maior $\ell > 0$ tal que existe um quadrado de lado ℓ contido num cubo de aresta 1.

04. (Cone Sul 2005, Problema 6) No plano cartesiano traçamos circunferências de raio 1/20 com centros em cada ponto de coordenadas inteiras. Mostre que qualquer circunferência de raio 100 que se trace no plano intersecta pelo menos uma das circunferências pequenas.

2. Cobrindo figuras

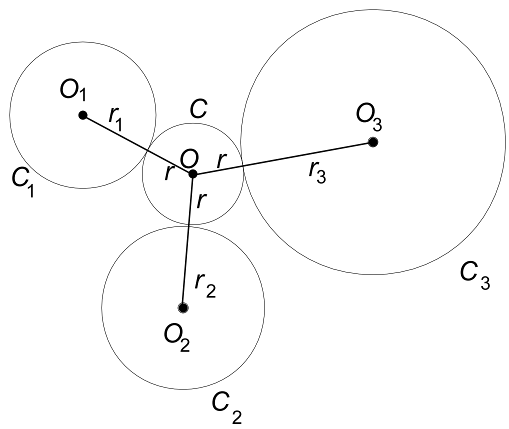
Problemas desse tipo podem ser resolvidos com uma variedade bastante grande de técnicas. Uma mistura de casos extremos, casa dos pombos e saber construir exemplos geralmente funciona bem.

Exemplo 2.1.

(USAMO 2007, Problema 2) Um reticulado no plano cartesiano consiste em todos os pontos (m, n), onde m e n são inteiros. É possível cobrir todos os pontos do reticulado com uma família infinita de círculos cujos interiores não se sobrepõem se cada círculo da família tem raio maior ou igual a 5?

Resolução

A resposta é não (os círculos são muito grandes, não?). Para isso, suponha que existe uma cobertura desse tipo e seja C o maior círculo que não se sobrepõe com algum círculo da família. Então o seu raio r deve ser menor do que $\sqrt{2}/2$; caso contrário, C cobriria um ponto do reticulado, que não seria coberto pela família.



Além disso, C tangencia pelo menos três círculos C_1, C_2, C_3 da família. Sejam O, O_1, O_2 e O_3 os centros dos círculos C, C_1, C_2, C_3, respectivamente. Então um dos ângulos $\angle O_1OO_2$, $\angle O_2OO_3$, $\angle O_3OO_1$ é menor ou igual a $120°$. Suponha, sem perdas, que é $\angle O_1OO_2$. Então, pela lei dos co-senos,

$$O_1O_2^2 \leq OO_1^2 + OO_2^2 + OO_1 \cdot OO_2$$

Sejam r_1 e r_2 os raios de C_1 e C_2, respectivamente. Então $O_1O_2 \geq r_1+r_2$, $OO_1 = r+r_1$ e $OO_2 = r+r_2$. Substituindo, obtemos

$$(r_1+r_2)^2 \leq (r+r_1)^2 + (r+r_2)^2 + (r+r_1)(r+r_2) \iff 12r^2 \geq (r_1-3r)(r_2-3r)$$

Mas $r < \sqrt{2}/2$ e r_1 e r_2 são maiores ou iguais a 5, de modo que

$$12r^2 \geq (5-3r)^2 \iff 2\sqrt{3}r \geq 5-3r \iff r \geq \frac{5}{3+2\sqrt{3}}$$

Um cálculo rápido mostra que $\frac{5}{3+2\sqrt{3}} > \frac{\sqrt{2}}{2}$, e o problema acabou. ∎

Exercícios

05. Três círculos de raio r cobrem um círculo de raio 1. Encontre o menor valor de r.

06. (OBM 2002, Nível 3, Problema 5) Temos um número finito de quadrados, de área total 4. Prove que é possível arranjá-los de modo a cobrir um quadrado de lado 1.

Obs: É permitido sobrepor quadrados e parte deles pode ultrapassar os limites do quadrado a ser coberto.

3. Princípio do extremo

Considerar a maior (ou menor) distância ou algum triângulo de área máxima (ou mínima) ou ... máximo (ou mínimo) pode ser bastante útil.

Exemplo 3.1.

(OBM 2007, Nível 3, Problema 3) São dados n pontos no plano, os quais são os vértices de um polígono convexo. Prove que o conjunto das medidas dos lados e das diagonais do polígono tem pelo menos $\lfloor n/2 \rfloor$ elementos distintos.

Resolução

Talvez esse não seja o exemplo mais simples no assunto, mas ele envolve tantas idéias interessantes que merece ser resolvido.

Primeiro, considere dois pontos A e B do polígono cuja distância é máxima. Tome B de modo que AB separe o polígono em dois polígonos, um deles com AB como *única* distância máxima.

Em cada um desses dois polígono vamos aplicar o seguinte

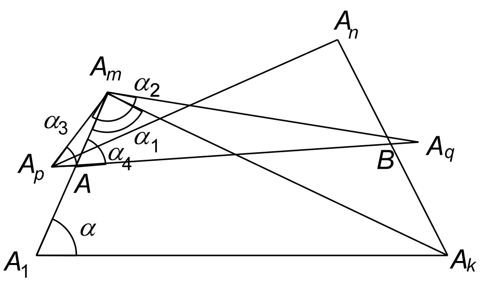
Lema 3.1. *Seja $A_1A_2\dots A_k$ um polígono convexo tal que a maior distância entre dois de seus vértices, incluindo diagonais, é A_1A_k. Então esse polígono tem $k-2$ distâncias diferentes; caso A_1A_k seja a única distância máxima, então há $k-1$ distâncias diferentes.*

Demonstração

Sejam A_p e A_q, $1 < p < q < k$ dois vértices do polígono. Vamos provar que, para quaisquer m e n com $p < m \leq n < q$ um dos segmentos A_pA_n, A_qA_m é menor do que A_pA_q. Em seguida, conseguiremos uma seqüência de $k-2$ distâncias diferentes.

Como conseguir distâncias menores? Ou, de modo mais geral, como comparar segmentos? Muitas vezes é melhor transferir tudo para ângulos, para que possamos fazer... isso mesmo, um arrastão!

Sejam $\alpha = \angle A_m A_1 A_k$, $\alpha_1 = \angle A_1 A_m A_k$, $\alpha_2 = \angle A_p A_m A_q$, $\alpha_3 = \angle A_q A_p A_m$, A a interseção de $A_p A_q$ e $A_1 A_m$ (note que, como o polígono é convexo, A está no interior do segmento $A_p A_q$) e $\alpha_4 = \angle A_m A A_q$.



Suponha que $A_p A_q \leq A_m A_q$. Então, no triângulo $A_m A_p A_q$, $\alpha_2 \leq \alpha_3$. Além disso, pelo teorema do ângulo externo no triângulo $A A_p A_m$, $\alpha_3 < \alpha_4$. Ademais, $\alpha_1 < \alpha_2$ e, sendo $A_1 A_k$ a maior distância de todas (e esse é o passo decisivo da demonstração e mostra o poder do princípio do extremo), no triângulo $A_1 A_m A_k$, $\alpha < \alpha_1$. Logo

$$\alpha < \alpha_1 < \alpha_2 \leq \alpha_3 < \alpha_4 \implies \alpha < \alpha_4$$

Definindo os β's analogamente e supondo que $A_p A_q \leq A_n A_p$, obtemos $\beta < \beta_4$. Porém, observando os quadriláteros $A_1 A_k A_n A_m$ e $A B A_n A_m$, temos que $\alpha + \beta + \angle A_1 A_m A_n + \angle A_k A_n A_m = \alpha_4 + \beta_4 + \angle A A_m A_n + \angle B A_n A_m = 360° \implies \alpha + \beta = \alpha_4 + \beta_4$. Mas

$$\left| \begin{array}{l} \alpha < \alpha_4 \\ \beta < \beta_4 \end{array} \right. \implies \alpha + \beta < \alpha_4 + \beta_4,$$

contradição.

O caso em que $m = n$ fica a cargo do leitor.

Para terminar, basta fazer uma espécie de "zigue-zague". Comece com $A_2 A_{k-1}$, que é menor do que $A_1 A_k$ (por quê? veja o próximo exercício!). Pelo que acabamos de provar, $A_2 A_{k-2}$ ou $A_3 A_{k-1}$ é menor do que $A_2 A_{k-1}$. Oba, mais uma distância! Suponha, por exemplo, que $A_3 A_{k-1}$ seja menor. Então, aplicando o nosso fato de novo, $A_4 A_{k-1}$ ou $A_3 A_{k-2}$ é menor do que $A_3 A_{k-1}$. Continuamos assim, até acabar o polígono, e assim conseguimos (conte!) $k - 2$ distâncias diferentes.

No caso em que $A_1 A_k$ é a única distância máxima, fica para você provar (use o poder do arrastão novamente!) que, no quadrilátero $A_1 A_2 A_{k-1} A_k$, uma das diagonais é menor do que $A_1 A_k$ (bem, isso é imediato ⌣̈) e maior do que $A_2 A_{k-1}$ (nisso você vai ter que trabalhar um pouquinho mais ⌣̈), de modo que ganhamos mais uma distância, totalizando $k - 1$. ∎

Agora, vamos terminar o problema. Lembre que cortamos o polígono original do problema em dois por uma diagonal AB com medida máxima. Suponha que os polígonos obtidos tenham $k + 1$ e $n - k + 1$ lados, sendo que o de $k + 1$ lados tem a distância máxima única. Nele, obtemos $(k + 1) - 1 = k$ distâncias diferentes, e no outro, $(n - k + 1) - 2 = n - k - 1$. Então conseguimos $d = \text{máx}\{k, n - k - 1\}$ distâncias. Mas $d \geq \frac{k+(n-k-1)}{2} = \frac{n-1}{2} \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. ∎

Exercícios

07. Seja S um conjunto finito de pontos. Prove que se A, B, C, D são pontos distintos de S tais que AB e CD são ambos segmentos de distância máxima, então esses segmentos se cortam em seus respectivos interiores.

08. (Olimpíada de Maio 2003) Beto marcou 2003 pontos verdes no plano, de maneira que todos os triângulos com seus três vértices verdes têm área menor que 1.

Demonstre que os 2003 pontos verdes estão contidos num triângulo T de área menor que 4.

09. (Um clássico! O Teorema de Sylvester) Dados n pontos, não todos colineares, prove que existe uma reta que passa por exatamente dois desses pontos.

10. (Cone Sul 2001, Problema 3) Três triângulos acutângulos estão inscritos em uma mesma circunferência, de modo que seus vértices são nove pontos distintos. Demonstre que se pode escolher um vértice de cada triângulo de maneira que os três pontos escolhidos determinem um triângulo cujos ângulos sejam menores que ou iguais a $90°$.

11. (Cone Sul 2001, Problema 4) Um polígono de área S está contido no interior de um quadrado de lado a. Demonstre que há pelo menos dois pontos do polígono que estão separados por uma distância maior que ou igual a S/a.

12. (Vingança Olímpica 2005, Problema 5) Encontre todos os conjuntos finitos X de pontos no plano, não todos colineares, satisfazendo a seguinte condição: para quaisquer duas circunferências distintas, cada uma passando por três pontos distintos de X, a interseção delas também está contida em X.

13. (OBM 1996, Problema 2) Existe um conjunto finito de $n > 2$ pontos no plano tais que não há três pontos colineares e o circuncírculo de quaisquer três pontos pertence ao conjunto?

4. Fecho convexo

Fecho convexo de um conjunto S de pontos (finito ou infinito) limitado no plano (poderia ser do espaço ou de figuras com mais dimensões ainda) é a menor figura convexa que contém S. No caso do plano, é figura obtida quando soltamos um elástico esticado em torno de S.

Exemplo 4.1.

(IMO 2002, Problema 6) Sejam Γ_1, Γ_2, ..., Γ_n círculos de raio 1 no plano, onde $n \geq 3$. Seus centros são O_1, O_2, ..., O_n, respectivamente.

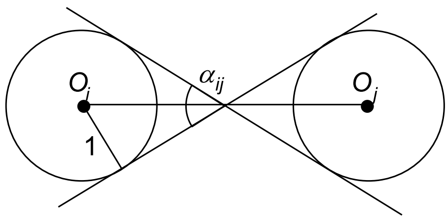
Suponha que não exista reta que intercepte mais que dois dos círculos. Prove que

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} \frac{1}{O_iO_j} \leq \frac{(n-1)\pi}{4}$$

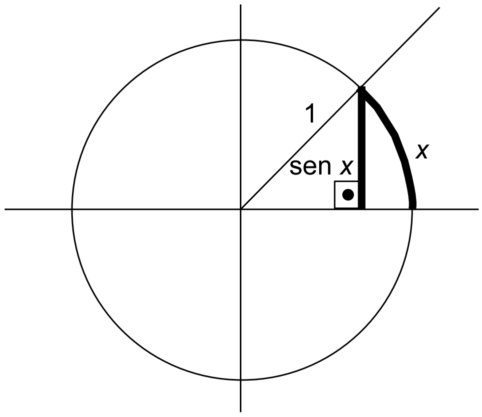
Resolução

O que é isso? Contas com segmentos de um lado e π do outro? O que fazer?

A primeira idéia é, na verdade, transformar tudo em ângulos. Seja α_{ij} o ângulo determinado entre as tangentes internas a Γ_i e Γ_j.



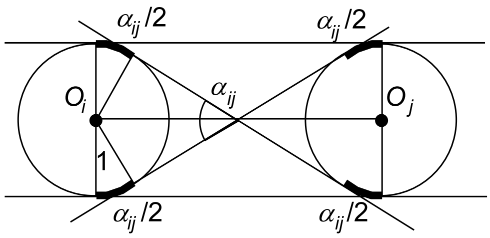
Veja que $\operatorname{sen}\frac{\alpha_{ij}}{2} = \frac{1}{O_iO_j/2} = \frac{2}{O_iO_j}$. A figura a seguir mostra que, para todo x real positivo, $\operatorname{sen} x < x$.



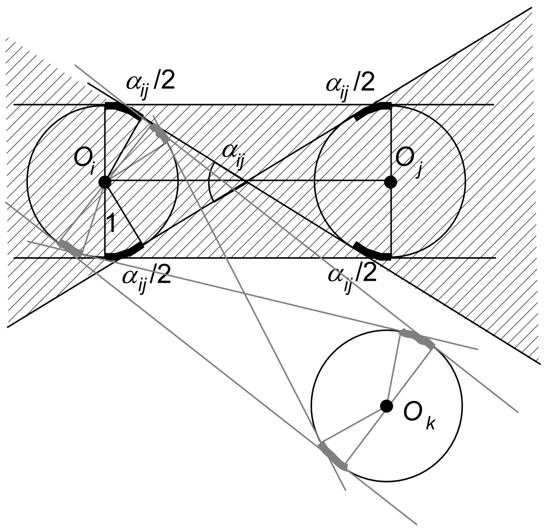
Assim, $\frac{1}{O_iO_j} = \frac{\operatorname{sen}\alpha/2}{2} < \frac{\alpha}{4}$, de modo que basta provar que

$$\sum_{1\le i<j\le n} \frac{\alpha_{ij}}{4} \le \frac{(n-1)\pi}{4} \iff \sum_{1\le i<j\le n} \alpha_{ij} \le (n-1)\pi$$

Voltemos para os α_{ij}'s. Eles também aparecem nos próprios círculos, como ilustramos na figura a seguir, traçando as tangentes externas (que são paralelas):

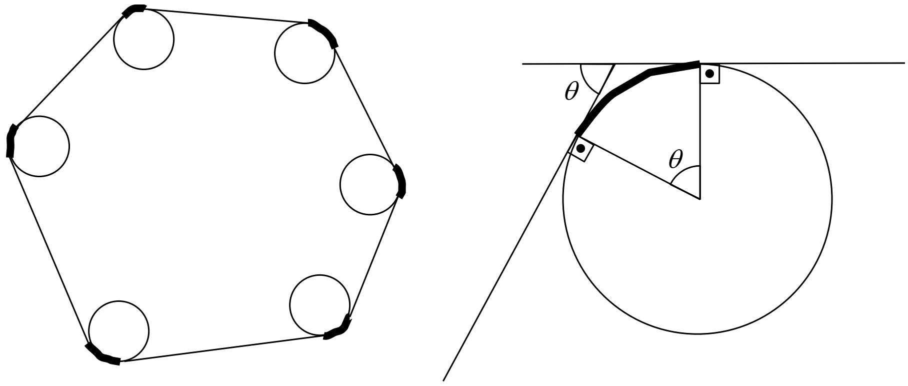


A condição de não haver retas que interceptem mais do que dois círculos se traduz em os $\alpha_{ij}/2$'s não se sobreporem nas figuras. A região hachurada indica em que regiões as circunferências diferentes de Γ_i e Γ_j não podem estar.



Assim, a soma de todos os α_{ij}'s é menor ou igual à metade da soma de todos os arcos (veja que cada $\alpha_{ij}/2$ aparece quatro vezes, totalizando $2\alpha_{ij}$), que em princípio é $n\pi$.

Faltou pouco! Mas será que não podemos melhorar essa conta? É aí que o fecho convexo entra! "soltando o elástico", vemos que alguns arcos não são contados:



A soma desses arcos é exatamente a soma dos ângulos externos de um polígono, que é 2π. Com isso, a metade da soma de todos os arcos é menor ou igual a $n\pi - \pi = (n-1)\pi$, e acabou. $\blacksquare$

Exercícios

14. Dados n pontos no plano, prove que três deles determinam um ângulo menor ou igual a $180°/n$.

5. Distâncias e números reais

Muitos problemas exploram distâncias, e em alguns deles queremos saber se eles satisfazem certas condições.

Exemplo 5.1.

(Ibero 1996, Problema 6) Tem-se n pontos distintos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ no plano e a cada ponto A_i se associa um número real λ_i diferente de zero, de maneira que $A_iA_j^2 = \lambda_i + \lambda_j$, para todos i, j com $i \neq j$. Demonstre que

(a) $n \leq 4$

(b) Se $n = 4$, então $\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3} + \frac{1}{\lambda_4} = 0$.

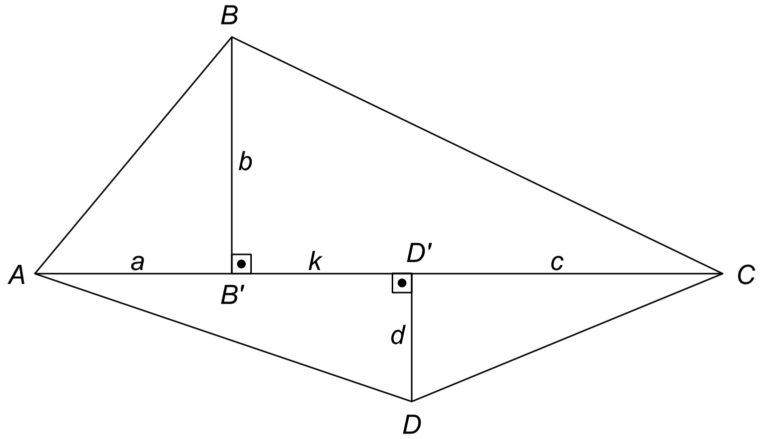
Resolução

Distâncias ao quadrado! Que teorema envolve distâncias ao quadrado? Uma dica: o nome do teorema começa com "Pit" e termina com "ágoras". Com o seu auxílio, provamos o seguinte

Lema 5.1. *Se A, B, C e D são pontos no plano então $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$ se, e somente se, AC e BD são perpendiculares.*

Demonstração

Seja B' e D' as projeções de B e D sobre a reta AC, respectivamente. Suponha que B' está mais à esquerda de D'. Seja $B'D' = k$.



Aplicando o teorema de Pitágoras quatro vezes, obtemos

$$\begin{array}{ll} AB^2 = a^2 + b^2 & AD^2 = (a+k)^2 + d^2 \\ CD^2 = c^2 + d^2 & BC^2 = (c+k)^2 + b^2 \end{array}$$

Assim,

$$\begin{aligned} AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2 &\iff a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = (a+k)^2 + b^2 + (c+k)^2 + d^2 \\ &\iff 2k(a+c+k) = 0 \iff 2k \cdot AC = 0 \iff k = 0, \end{aligned}$$

de modo que as projeções de B e D sobre AC devem coincidir, provando que a igualdade ocorre se, e somente se, BD é perpendicular a AC. ∎

Com isso, o problema fica simples. Suponha que $n \geq 4$, de modo que existam A_1, A_2 e A_3. Note que, sendo $i > 3$, $A_1A_i^2 + A_2A_3^2 = \lambda_1 + \lambda_i + \lambda_2 + \lambda_3 = A_1A_2^2 + A_3A_i^2$, e pelo lema, A_2A_i é perpendicular a A_1A_3, isto é, A_i pertence à altura por A_2 de $A_1A_2A_3$. É claro que A_2 não é mais especial do que A_1 e A_3, assim, analogamente A_i também pertence à altura por A_1 de $A_1A_2A_3$. Deste modo, A_i está na interseção das duas alturas, ou seja, seu ortocentro. Isso vale para *todo* ponto A_i diferente de A_1, A_2 e A_3. Mas como só existe um ortocentro, só pode haver um ponto a mais, ou seja, $n \leq 4$. Isso resolve o item a.

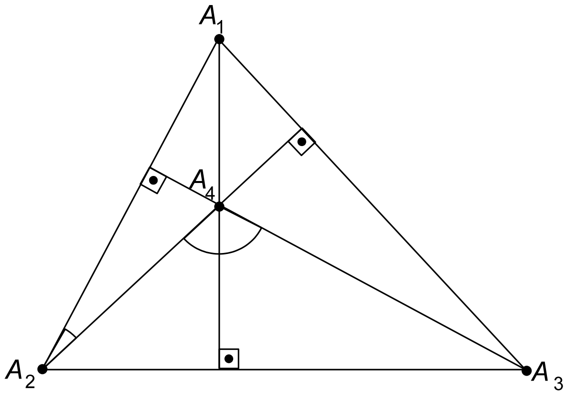
Vamos para o item b. Primeiro, considere três pontos A_i, A_j e A_k. Então

$$\left| \begin{array}{l} A_iA_j^2 = \lambda_i + \lambda_j \\ A_iA_k^2 = \lambda_i + \lambda_k \\ A_jA_k^2 = \lambda_j + \lambda_k \end{array} \right. \iff \left| \begin{array}{l} \lambda_i = \dfrac{A_iA_j^2 + A_iA_k^2 - A_jA_k^2}{2} \\ \lambda_j = \dfrac{A_iA_j^2 + A_jA_k^2 - A_iA_k^2}{2} \\ \lambda_k = \dfrac{A_iA_k^2 + A_jA_k^2 - A_iA_j^2}{2} \end{array} \right.$$

Mas, pela lei dos co-senos, $\frac{A_iA_j^2 + A_iA_k^2 - A_jA_k^2}{2} = A_iA_j \cdot A_iA_k \cdot \cos \angle A_jA_iA_k$. Assim,

$$\left| \begin{array}{l} \lambda_i = A_iA_j \cdot A_iA_k \cdot \cos \angle A_jA_iA_k \\ \lambda_j = A_iA_j \cdot A_jA_k \cdot \cos \angle A_iA_jA_k \\ \lambda_k = A_iA_k \cdot A_jA_k \cdot \cos \angle A_iA_kA_j \end{array} \right.$$

Vamos supor que A_4 é ortocentro do triângulo acutângulo $A_1A_2A_3$ (na verdade, cada ponto é ortocentro do triângulo determinado pelos três outros pontos). Note que o triângulo não pode ser retângulo, o que prova que nenhum dos λ's pode ser zero.



Note que $\angle A_2A_4A_3 = \angle A_4A_2A_1 + 90°$, de modo que $\cos\angle A_4A_2A_1 = -\operatorname{sen}\angle A_2A_4A_3$. Deste modo, isolando os co-senos na relação acima e substituindo na relação fundamental $\cos^2\angle A_2A_4A_3 + \operatorname{sen}^2\angle A_2A_4A_3 = 1$, obtemos

$$\left(\frac{\lambda_4}{A_2A_4\cdot A_3A_4}\right)^2 + \left(\frac{\lambda_2}{A_2A_4\cdot A_1A_2}\right)^2 = 1$$

Como $A_iA_j^2 = \lambda_i + \lambda_j$, tirando o mínimo e substituindo obtemos

$$\lambda_4^2(\lambda_1+\lambda_2) + \lambda_2^2(\lambda_3+\lambda_4) = (\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_3+\lambda_4)(\lambda_2+\lambda_4)$$

Dividindo tudo por $\lambda_1\lambda_2^2\lambda_3\lambda_4^2$,

$$\frac{1}{\lambda_2\lambda_3}\left(\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}\right) + \frac{1}{\lambda_1\lambda_4}\left(\frac{1}{\lambda_3}+\frac{1}{\lambda_4}\right) = \left(\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}\right)\left(\frac{1}{\lambda_3}+\frac{1}{\lambda_4}\right)\left(\frac{1}{\lambda_2}+\frac{1}{\lambda_4}\right)$$

Separando o segundo membro:

$$\frac{1}{\lambda_2\lambda_3}\left(\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}\right) + \frac{1}{\lambda_1\lambda_4}\left(\frac{1}{\lambda_3}+\frac{1}{\lambda_4}\right) = \frac{1}{\lambda_2}\left(\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}\right)\left(\frac{1}{\lambda_3}+\frac{1}{\lambda_4}\right) + \frac{1}{\lambda_4}\left(\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}\right)\left(\frac{1}{\lambda_3}+\frac{1}{\lambda_4}\right)$$

Para que isso? Ora, para fatorar! Colocando $\frac{1}{\lambda_2}(\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2})$ e $\frac{1}{\lambda_4}(\frac{1}{\lambda_3}+\frac{1}{\lambda_4})$ em evidência no segundo membro, obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\lambda_2}\left(\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}\right)\left(\frac{1}{\lambda_3}+\frac{1}{\lambda_4}-\frac{1}{\lambda_3}\right) + \frac{1}{\lambda_4}\left(\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}-\frac{1}{\lambda_1}\right)\left(\frac{1}{\lambda_3}+\frac{1}{\lambda_4}\right) = 0\\
\iff\ &\frac{1}{\lambda_2\lambda_4}\left(\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}\right) + \frac{1}{\lambda_2\lambda_4}\left(\frac{1}{\lambda_3}+\frac{1}{\lambda_4}\right) = 0\\
\iff\ &\frac{1}{\lambda_2\lambda_4}\left(\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}+\frac{1}{\lambda_3}+\frac{1}{\lambda_4}\right) = 0\\
\iff\ &\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}+\frac{1}{\lambda_3}+\frac{1}{\lambda_4} = 0
\end{aligned}$$

∎

Exercícios

15. (Ibero 1997, Problema 6) Seja $P = \{P_1, P_2, \dots, P_{1997}\}$ um conjunto de 1997 pontos no interior de um círculo de raio 1, sendo P_1 o centro do círculo. Para cada $k = 1, \dots, 1997$ seja x_k a distância de P_k ao ponto de P mais próximo a P_k e distinto de P_k. Demonstrar que

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{1997}^2 \le 9$$

16. (Ibero 1998, Problema 5) Encontrar o maior valor possível n para que existam pontos distintos P_1, P_2, P_3, ..., P_n no plano, e números reais r_1, r_2, ..., r_n de modo que a distância entre quaisquer dois pontos diferentes P_i e P_j seja $r_i + r_j$.

17. (IMO 1995, Problema 3) Determine todos os inteiros $n > 3$ tais que existem n pontos A_1, A_2, ..., A_n no plan sem que haja três deles colineares e números reais r_1, r_2, ..., r_n tais que, para todos i, j, k distintos, a área do triângulo $A_iA_jA_k$ é $r_i + r_j + r_k$.

6. Esse problema é de geometria??

Muitas vezes idéias geométricas são úteis em problemas que aparentemente não são de Geometria. Como em Combinatória, por exemplo.

Exemplo 6.1.

(Cone Sul 1998, Problema 6) O prefeito de uma cidade deseja estabelecer um sistema de transportes com pelo menos uma linha de ônibus, no qual:

(i) cada linha passe exatamente por três paradas;

(ii) cada duas linhas distintas tenham exatamente uma parada em comum;

(iii) para cada duas paradas de ônibus distintas exista exatamente uma linha que passe por ambas.

Determine o número de paradas de ônibus da cidade.

Resolução

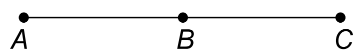
Vamos representar linhas de ônibus por uma reta e paradas por pontos. Uma linha passa por uma parada se, e somente se, a reta correspondente passa pelo ponto correspondente. Reescrevendo as três condições do enunciado em termos de retas e pontos, temos:

(i) cada reta passa exatamente por três pontos;

(ii) cada duas retas distintas têm exatamente um ponto em comum;

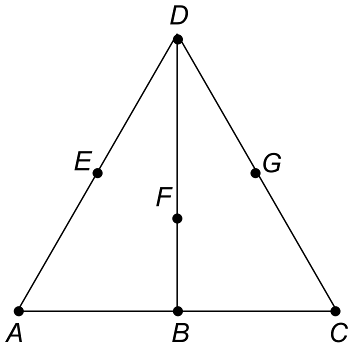
(iii) por dois pontos passa exatamente uma reta.

Assim, podemos desenhar (isso mesmo!) as possibilidades. Uma é ter exatamente uma linha (cidade pequena essa, não?), totalizando três pontos A, B e C:

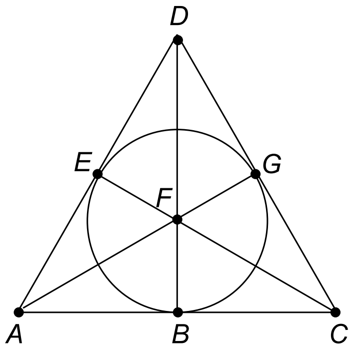


Agora, pode haver mais pontos. Considere um ponto D fora da reta. Por A e D passa uma reta, e essa reta não pode ser ABC, pois ela não teria três pontos; essa nova reta não pode passar por B ou por C, pois duas retas têm exatamente um ponto em comum. Assim, a reta AD precisa conter um novo ponto E.

Analogamente, obtemos as retas BDF e CDG.



Será que pode haver mais um ponto H? Vejamos a reta DH. Ela deve cortar a reta ABC em um de seus pontos, mas nenhum deles serve, já que já temos as retas AD, BD e CD e se um dos pontos A, B ou C pertencesse a DH então essa reta e AD, BD ou CD têm dois pontos de interseção (D e um dos pontos A, B, C). Então não podemos mais ter pontos. Completando as linhas, podemos obter o seguinte exemplo, com 7 paradas (uma das linhas é circular):



Com um pouquinho mais de esforço você pode provar que o único exemplo para 7 paradas é esse.

Deste modo, a cidade tem 3 ou 7 paradas.

Exercícios

18. (OBM 2002, Nível 3, Problema 6) Arnaldo e Beatriz se comunicam durante um acampamento usando sinais de fumaça, às vezes usando uma nuvem grande, às vezes uma pequena.

No tempo disponível antes do café da manhã, Arnaldo consegue enviar uma seqüência de 24 nuvens. Como Beatriz nem sempre consegue distinguir uma nuvem pequena de uma grande, ela e Arnaldo fizeram um dicionário antes de ir para o acampamento. No dicionário aparecem N seqüências de 24 tamanhos de nuvem (como por exemplo a seqüência $PGPGPGPGPGPGGPGPGPGPGPGP$, onde G significa nuvem grande e P significa nuvem pequena). Para cada uma das N seqüências, o dicionário indica seu significado. Para evitar interpretações erradas, Arnaldo e Beatriz evitaram incluir no dicionário seqüências parecidas. Mais precisamente, duas seqüências no dicionário sempre diferem em pelo menos 8 das 24 posições.

Demonstre que $N \leq 4096$.

Dica: pense em círculos! Defina distância entre duas seqüências como a quantidade de posições com nuvens de tamanhos diferentes nas duas seqüências. Por incrível que pareça, essa distância satisfaz a desigualdade triangular e podemos definir círculos de raio r e centro em uma seqüência s como as seqüências *com distância menor ou igual a r de s. A idéia é, então, pensar no fato de que círculos com centros distantes não podem se intersectar.*

19. (IMO 1996, Problema 6) Sejam n, p, q inteiros positivos com $n > p + q$. Sejam $x_0, x_1, \ldots, x_n$ inteiros que verificam as seguintes condições:

(a) $x_0 = x_n = 0$, e

(b) Para cada i, $1 \leq i \leq n$, tem-se que

$$x_i - x_{i-1} = p \text{ ou } x_i - x_{i-1} = -q.$$

Demonstrar que existe um par $(i, j) \neq (0, n)$, tal que $x_i = x_j$.

Dica: Primeiro mostre que $n = k(p + q)$, k inteiro maior que 1. Em seguida, desenhe um quadriculado $kp \times kq$ e dê um passo para a direita se $x_i - x_{i-1} = p$ e um passo para cima se $x_i - x_{i-1} = -q$. O que significa $x_i = x_j$ nesse quadriculado? Se você conseguiu a resposta, a demonstração termina ligando pontos!

7. Referências bibliográficas

[1] Quer fontes de problemas para estudar? Primeiro, estude um pouco de inglês; depois, visite os seguintes sites:

`http://www.kalva.demon.co.uk/`

`http://www.mathlinks.ro/`

[2] É claro, não podemos esquecer o site da OBM (esse em português!):

`http://www.obm.org.br/`

[3] Os colegas e amigos Davi Máximo e Samuel Feitosa escreveram um belíssimo artigo na Eureka! 25: *Problemas sobre Pontos*.