As Crônicas de Nérdia: o Círculo, a Rotação e os Isogonais

Quero começar com uma discussão bastante interessante.

1. Geometria sintética × geometria analítica

Desde a época de aluno (em 1995), eu sempre resolvi os problemas de Geometria com contas, em especial trigonometria, do jeito que Edmilson e Eduardo Tengan me ensinaram e praticaram. Em 2000, comecei a treinar alunos e acabei "passando a tecnologia". A lei dos senos, para nós, paulistas, passou a ser a "sagrada lei dos senos". Essa experiência em fazer contas culminou no artigo *Geometria com Contas*, na Eureka! 17.

Por outro lado, os cearenses sempre estudaram bastante geometria sintética, ou seja, faziam a maior parte dos problemas com argumentos sintéticos. Ocorreu, então, uma divisão na abordagem em problemas de Geometria: a trigonometria ("geometria paulista") e a sintética ("geometria cearense"). O contraste é tamanho que a coordenação nos problemas de Geometria na IMO 2002 foi: primeiro, os "geometric people"; depois os "trigonometric people".

Todavia, nesses últimos anos, considerando ainda que os problemas de Geometria da IMO têm ficado mais difíceis, cheguei à conclusão de que é preciso saber tanto fazer contas como ter idéias sintéticas para resolver problemas. Podemos comparar isso como estilos de luta: afinal, quem é mais poderoso: aquele que sabe judô ou aquele que sabe boxe? A resposta não é nem um, nem outro: é quem sabe ambos.

O próximo exemplo e os outros exercícios dessa seção servem como treinos.

Exemplo 1.1.

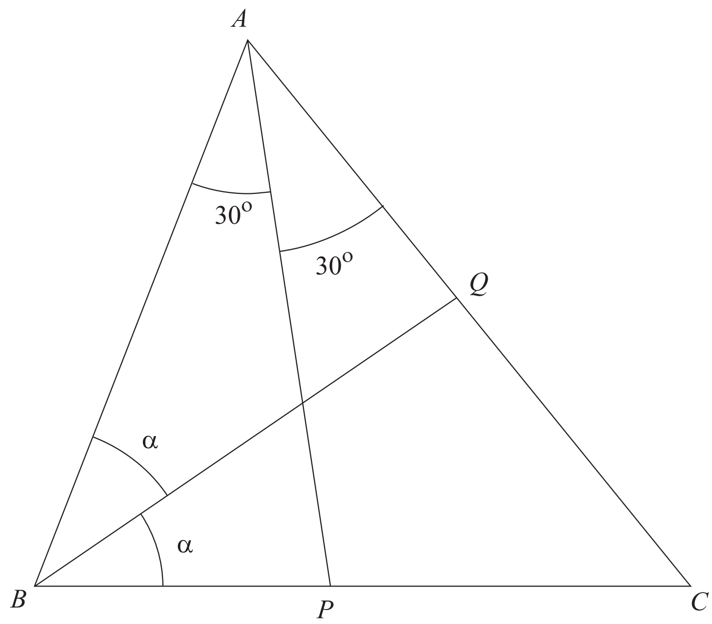
(IMO) Num triângulo ABC, seja AP a bissetriz de $\angle BAC$ com P no lado BC, e seja BQ a bissetriz de $\angle ABC$ com Q no lado CA.

Sabemos que $\angle BAC = 60^\circ$ e que $AB + BP = AQ + QB$.

Quais são os possíveis valores dos ângulos do triângulo ABC?

Resolução

Primeiro, uma figura bem feita. O problema é que não sabemos as medidas dos ângulos, então a figura certamente não ficará perfeita. O máximo que podemos fazer é desenhar algumas figuras para conseguir ter uma estimativa da resposta, se é que é única.



A relação dada $AB + BP = AQ + QB$ é sugestiva de várias maneiras.

Solução trigonométrica

A sistemática para se resolver problemas na conta é reduzi-los a resolver uma equação ou provar uma identidade trigonométrica. Aqui não vai ser diferente: vamos transformar a condição $AB + BP = AQ + QB$ numa equação trigonométrica e vamos resolvê-la.

Note que os triângulos que envolvem os segmentos AB, BP, AQ e QB são ABP e AQB. Ambos têm AB, então esse segmento deve ter um papel importante nas contas.

Reescreva a relação dada como

$$\frac{BP}{2} = \frac{AQ + QB - AB}{2}$$

Sendo p o semiperímetro do triângulo AQB e R o circunraio do mesmo triângulo, e sendo $\angle AQB/2 = (180^\circ - (\alpha + 60^\circ))/2 = 90^\circ - (30^\circ + \alpha/2)$,

$$\begin{aligned}
\frac{AQ + QB - AB}{2} &= p - AB = 4R\cos\left(90^\circ - \left(30^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)\right)\operatorname{sen} 30^\circ \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\
&= \frac{AB}{\operatorname{sen}(\alpha + 60^\circ)}\operatorname{sen}\left(30^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\
&= \frac{AB\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2\cos\left(30^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)}
\end{aligned}$$

Acima, utilizamos a identidade $p - a = 4R\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\gamma}{2}\right)$ e a lei dos senos em AQB.

Assim, da relação dada e da sagrada lei dos senos em ABP,

$$\frac{BP}{AB} = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(30^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)} \iff \frac{\operatorname{sen} 30^\circ}{\operatorname{sen}(30^\circ + 2\alpha)} = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(30^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)} \qquad (*)$$

Agora, é só fazer as contas:

$$\begin{aligned}
(*) &\iff \cos\left(30^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) = 2\operatorname{sen}(30^\circ + 2\alpha)\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\
&\iff \cos\left(30^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) = \cos\left(30^\circ + \frac{3\alpha}{2}\right) - \cos\left(30^\circ + \frac{5\alpha}{2}\right) \\
&\iff \cos\left(30^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) + \cos\left(30^\circ + \frac{5\alpha}{2}\right) = \cos\left(30^\circ + \frac{3\alpha}{2}\right) \\
&\iff 2\cos\left(30^\circ + \frac{3\alpha}{2}\right)\cos\alpha = \cos\left(30^\circ + \frac{3\alpha}{2}\right) \\
&\iff \cos\left(30^\circ + \frac{3\alpha}{2}\right) = 0 \quad (I) \text{ ou } \cos\alpha = \frac{1}{2} \quad (II)
\end{aligned}$$

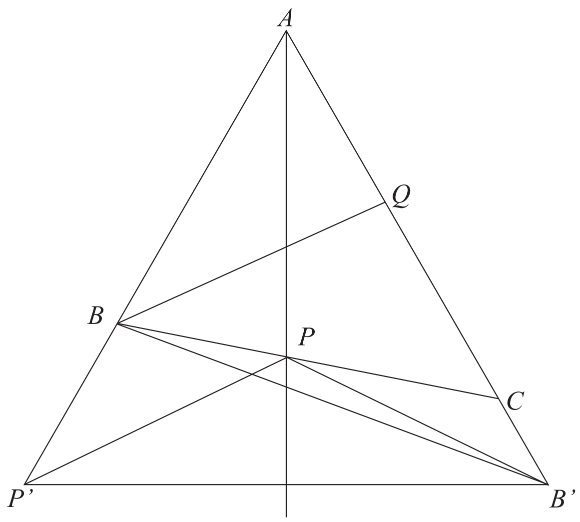
De (II), obtemos $\alpha = 60^\circ$, o que não é possível, já que, observando os ângulos internos do triângulo ABC, $2\alpha + 60^\circ < 180^\circ \iff \alpha < 60^\circ$. Assim, vale (I) e, levando em conta que $30^\circ < 30^\circ + \frac{3\alpha}{2} < 120^\circ$, temos $30^\circ + \frac{3\alpha}{2} = 90^\circ \iff \alpha = 40^\circ$.

Logo os ângulos do triângulo ABC são $\angle BAC = 60^\circ$, $\angle ABC = 2\alpha = 80^\circ$ e $\angle BCA = 180^\circ - 60^\circ - 80^\circ = 40^\circ$.

Solução sintética

Relações como a dada no enunciado muitas vezes sugerem construções que as transformam em igualdades entre segmentos. Nesse caso, temos algo muito sugestivo: $AB + BP = AQ + QB$ *pede* para estendermos

AB e AQ e considerarmos P' e B' sobre as respectivas extensões tais que $BP' = BP$ e $QB' = QB$ (se você gosta de formar imagens sobre estas construções, é como se BP e QB fossem “portinhas” com B e Q como respectivas dobradiças; só estamos “abrindo as portinhas”).



Temos muito a ganhar com essas construções. Primeiro, por causa delas ganhamos dois triângulos isósceles, BPP' e QBB'; e depois, temos **o** triângulo isósceles: $AP'B'$ é equilátero, pois $\angle P'AB' = 60^\circ$ e $AP' = AB + BP' = AB + BP = AQ + QB = AQ + QB' = AB'$. E mais ainda: AP agora não só é bissetriz do nosso recém-achado triângulo equilátero, mas também tudo mais: altura, mediana, mediatriz, eixo de simetria.

O único problema é que não sabemos a posição entre B' e C. Pode ser que C esteja entre A e B'; pode ser que B' esteja entre A e C; e pode até ser que B' coincida com C. Temos que pensar nos três casos.

Primeiro caso: C entre A e B'

Acompanhe na figura acima: seja α definido como na outra solução. No triângulo BPP', $\angle BPP' = \angle BP'P = \angle ABC/2 = \alpha$.

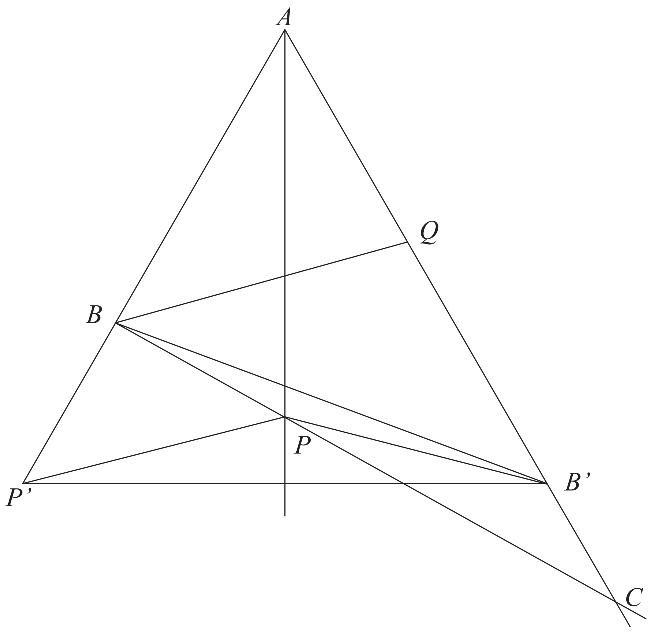
Além disso, da simetria em torno da reta AP, os triângulos APP' e APB' são congruentes; portanto $\angle AB'P = \angle AP'P = \alpha$. Em particular, $\angle QB'P = \angle QBP = \alpha$.

Enquanto isso, no triângulo QBB', $\angle QB'B = \angle QBB'$. Temos $\angle QB'P = \angle QBP$. Subtraindo essas duas últimas igualdades membro a membro obtemos $\angle PB'B = \angle PBB'$, ou seja, o triângulo PBB' é também isósceles e $PB = PB'$.

O golpe final vem do fato de que P está na mediatriz de $P'B'$: por causa disso, $PP' = PB' = PB$ e o triângulo BPP' é equilátero. Mas isso implica $\alpha = 60^\circ$, o que é impossível por motivos que discutimos (sem a ajuda de senos e co-senos) na primeira solução.

Assim, chegamos a uma contradição e, portanto, C não está entre A e B'.

Segundo caso: B' *entre* A *e* C

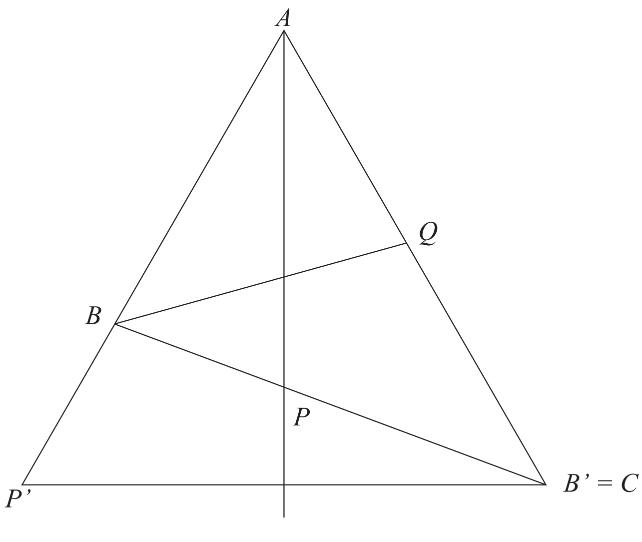


O que podemos aproveitar do primeiro caso? Na verdade, tudo! Ainda temos $\angle BPP' = \angle BP'P = \alpha$; APP' e APB' ainda são congruentes e, conseqüentemente, da mesma forma, $\angle QB'P = \angle QBP = \alpha$. Mesmo o que fizemos no triângulo QBB' é igual: obtemos $-\angle PB'B = -\angle PBB'$. O triângulo BPP' é equilátero de novo e chegamos num absurdo.

Por isso os dois desenhos anteriores estão ruins: porque não são a configuração certa.

Deste modo concluímos que o único caso válido é na verdade o

Terceiro caso: $C = B'$



Aqui, tudo é bem mais simples: temos $\angle ACB = \angle QCB = \angle QB'B = \angle QBB' = \angle QBC = \alpha$. No triângulo ABC, $\angle ABC + \angle ACB + 60° = 180° \iff 2\alpha + \alpha = 120° \iff \alpha = 40°$ e os ângulos internos de ABC são $\angle BAC = 60°$, $\angle ABC = 80°$ e $\angle ACB = 40°$.

1.1. Qual é a solução mais fácil?

Em meio a toda a discussão acima, essa pergunta torna-se necessária. Tenho um pressentimento muito forte de que fizéssemos alguma votação, os votos se dividiriam pela metade (não vale concentrar os votos em um estado só!).

Tenho motivos para essa crença: ambas as soluções são, de certo modo, técnicas, no sentido que exigem algum conhecimento e treinamento prévio das idéias envolvidas. E ambas têm suas próprias dificuldades: na solução trigonométrica, se não usássemos a identidade envolvendo $p - a$ provavelmente seria mais difícil obter a fatoração (e digo isso por experiência própria; na época, em 2001, não fiz desse jeito); por outro lado, na solução sintética é importante notar a sutileza da posição de C em relação a B' e dividir o problema em três casos (sendo que o único caso que não leva a absurdo é justamente o mais improvável; bom, parte da beleza da Matemática está aí, não?).

De qualquer forma, deixo para o leitor esse julgamento. Mas ressalto mais uma vez que saber judô **e** boxe é mais seguro que saber judô **ou** boxe.

Além disso, pode ocorrer de soluções sintéticas serem mais difíceis de obter que soluções analíticas e vice-versa. Nesse caso, compare saber as técnicas de ambas com ter itens num jogo de videogame: um item pode ser totalmente inútil uma hora mas imprescindível em outra; e quanto mais itens você tiver, mais chance tem de terminar o jogo.

Exercícios

Nos próximos problemas, tente encontrar duas soluções: uma sintética e outra com contas.

01. No triângulo ABC, $AB = AC$. D é um ponto sobre o lado BC tal que $BD = 2CD$. Se P é o ponto de AD tal que $\angle ABP = \angle PAC$, prove que $2\angle DPC = \angle BAC$.

02. (IMO) Seja ABC um triângulo acutângulo com circuncentro O. Seja PA uma altura do triângulo com P no lado BC.

Considere que $\angle BCA \geq \angle ABC + 30°$.

Prove que $\angle CAB + \angle COP < 90°$.

03. (IMO) Duas circunferências Γ_1 e Γ_2 estão contidas no interior de uma circunferência Γ e são tangentes a Γ em pontos distintos M e N, respectivamente. A circunferência Γ_1 passa pelo centro de Γ_2. A reta que passa pelos dois pontos de intersecção de Γ_1 e Γ_2 intercepta Γ em A e B. As retas MA e MB interceptam Γ_1 respectivamente em C e D. Prove que CD é tangente a Γ_2.

04. (IMO) Considere um hexágono convexo tal que para cada quaisquer dois lados opostos verifica-se a seguinte propriedade: a distância entre os seus pontos médios é igual a $\sqrt{3}/2$ vezes a soma dos seus comprimentos. Demonstre que todos os ângulos do hexágono são iguais.

(Um hexágono convexo $ABCDEF$ tem três pares de lados opostos: AB e DE, BC e EF, CD e FA).

05. (São Petersburgo) Seja AL uma bissetriz interna do triângulo ABC, com L sobre BC. As retas paralelas ℓ_1 e ℓ_2 passam por B e C, respectivamente, e são equidistantes de A. Os pontos M e N pertencem a ℓ_1 e ℓ_2, respectivamente, e são tais que os pontos médios de LM e LN pertencem a AB e AC, respectivamente. Prove que $LM = LN$.

06. (Rússia) No triângulo ABC, o ex-incírculo relativo a A toca o lado BC em A'. Traçamos uma reta que passa por A' e é paralela à bissetriz interna de $\angle BAC$. Traçamos retas análogas para os outros dois lados. Prove que essas três retas são concorrentes.

O resto do artigo será para apresentarmos algumas idéias sintéticas para problemas de Geometria que não são novas, mas que são ao mesmo tempo simples e profundas. E o mais interessante: são essencialmente técnicas que, se não resolvem problemas completamente, podem orientar e estruturar as contas.

2. Círculo de Apolônio

São dados dois pontos A e B e um real $k > 0$. Qual é o lugar geométrico dos pontos X do plano tais que

$$\frac{AX}{BX} = k?$$

Sabemos a resposta para $k = 1$: a mediatriz de AB. E para $k \neq 1$?

Teorema 2.1. *Dados dois pontos distintos A e B e o real $0 < k \neq 1$, o lugar geométrico dos pontos X do plano tais que*

$$\frac{AX}{BX} = k$$

é um círculo cujo centro está sobre a reta AB; tal lugar geométrico é denominado círculo de Apolônio de A e B e razão k.

Demonstração

A demonstração é incrivelmente simples: geometria analítica. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $A = (1; 0)$ e $B = (0; 0)$. Se $X = (x; y)$,

$$\begin{aligned}
\frac{AX}{BX} = k &\iff AX^2 = k^2 BX^2 \\
&\iff (x-1)^2 + y^2 = k^2(x^2 + y^2) \\
&\iff x^2 + y^2 + \frac{2}{k^2-1}\,x - \frac{1}{k^2-1} = 0 \\
&\iff \left(x + \frac{1}{k^2-1}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{k}{k^2-1}\right)^2,
\end{aligned}$$

ou seja, o lugar geométrico é o círculo de centro $\left(-\frac{1}{k^2-1}; 0\right)$ e raio $\left|\frac{k}{k^2-1}\right|$. Note que o centro pertence à reta AB, que admite equação $y = 0$. ∎

Não estamos interessados nessa demonstração e sim, nas propriedades do círculo de Apolônio. O fato de o lugar geométrico ser um círculo já é interessante *per se*: a partir de uma simples proporção, conseguimos um círculo e, conseqüentemente, ângulos iguais; a conexão entre igualdade de razões entre segmentos e igualdade de ângulos está estabelecida.

Mas ainda há muitas outras conexões.

No que se segue, Γ é um círculo de Apolônio de A e B.

2.1. Círculo de Apolônio e bissetrizes

Círculos indicam ângulos iguais, mas quais? A resposta reside em outro teorema simples envolvendo razões, o teorema das bissetrizes:

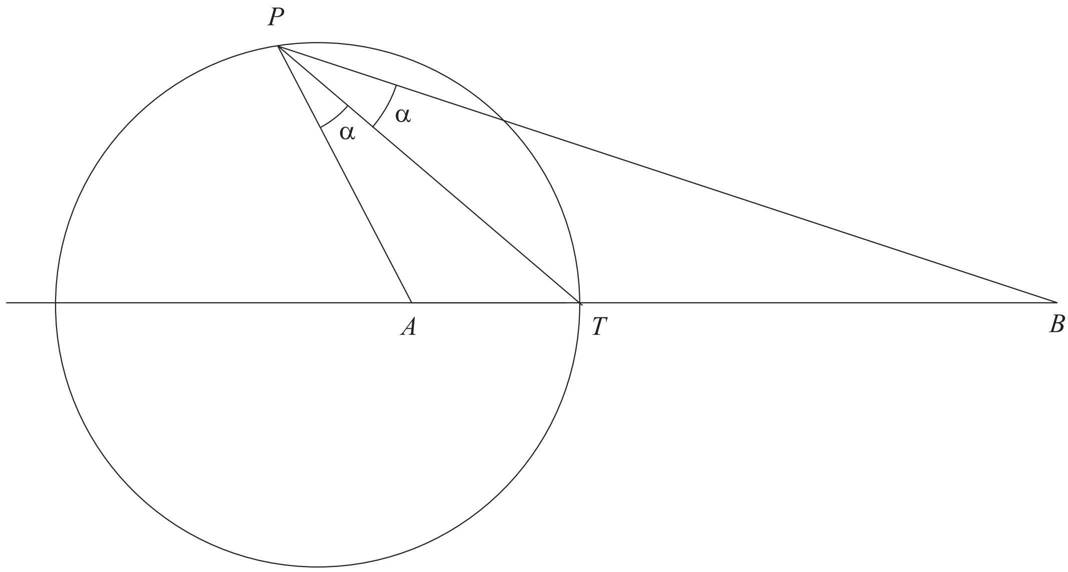
Teorema 2.2. *(Teorema das Bissetrizes). Se a bissetriz interna e a bissetriz externa de $\angle ACB$ cortam AB em T e U, respectivamente, então*

$$\frac{AT}{BT} = \frac{AU}{BU} = \frac{AC}{BC}$$

A partir desse importante teorema, podemos provar o

Lema 2.1. *Seja T a interseção de Γ e o segmento AB. Então Γ é o lugar geométrico dos pontos P tais que PT é bissetriz interna de $\angle APB$.*

Demonstração



Imediato do teorema das bissetrizes, pois como P e T pertencem a Γ,

$$\frac{AT}{BT} = \frac{AP}{BP}$$

∎

Reforçando: essa propriedade e o fato do lugar geométrico ser um círculo estabelece uma ligação direta entre razões entre segmentos e ângulos, como veremos no próximo exemplo.

Exemplo 2.1.

(Polônia) Seja $ABCD$ um quadrilátero côncavo, sendo o ângulo interno $\angle DAB$ maior que $180°$ e $AB \cdot CD = AD \cdot BC$. Seja P o simétrico de A em relação a BD. Prove que $\angle PCB = \angle ACD$.

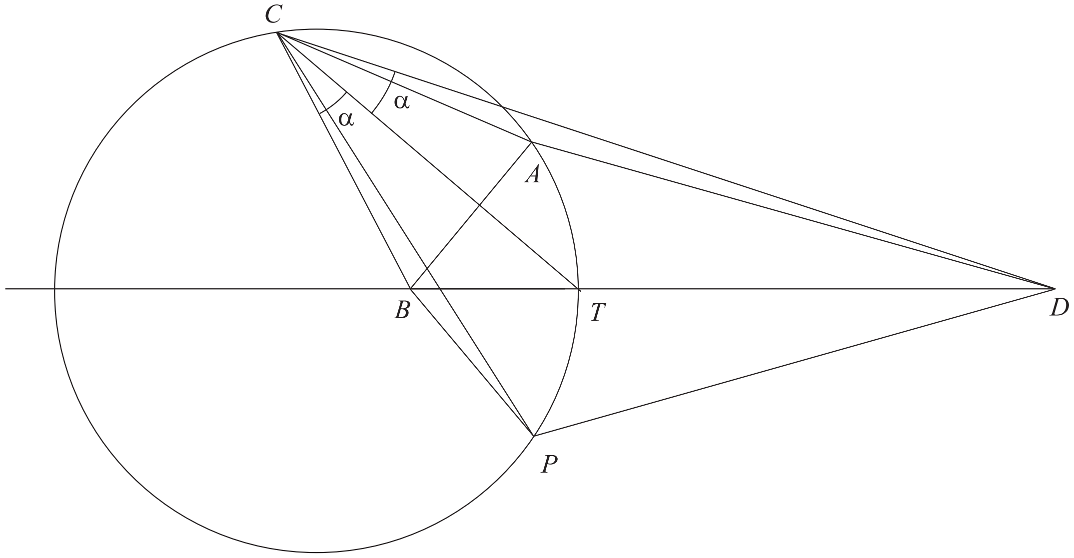
Observação: Esse problema foi proposto por um dos membros do fórum *Mathlinks* (cadastre-se em `http://www.mathlinks.ro/`) para mim via mensagem particular. Achei engraçado porque eu nem conhecia o cara e porque, de alguma forma, ele achou que eu ia resolver esse problema muito facilmente. Eu consegui resolver, mas só depois de alguns dias pensei no círculo de Apolônio.

Eu já sabia da definição de círculo de Apolônio, mas nunca parei para pensar em suas propriedades. O lema acima, por exemplo, veio durante a resolução do problema. Foi o primeiro problema que vi cuja resolução envolvia o círculo de Apolônio de modo tão crucial e que mostrou sua ubiqüidade.

Resolução

Usar círculo de Apolônio aqui é razoável se reescrevermos a condição $AB \cdot CD = AD \cdot BC$ como $\frac{BA}{DA} = \frac{BC}{DC}$. Além disso, sendo P o simétrico de A em relação a BD, os triângulos BPD e BAD são congruentes, logo $\frac{BP}{DP} = \frac{BA}{DA} = \frac{BC}{DC}$, ou seja, P, A e C pertencem a um mesmo círculo de Apolônio Γ de B e D.

Levando em conta ainda que queremos provar uma igualdade de ângulos e que o círculo de Apolônio é o lugar geométrico de vértices de bissetrizes, seja T o ponto de interseção de Γ e BD. Então CT é bissetriz de $\angle BCD$ e, conseqüentemente, $\angle BCT = \angle TCD$.



Observe na figura que para chegarmos em $\angle PCB = \angle ACD$ basta provar que $\angle PCT = \angle TCA$. Mas isso é equivalente a $AT = TP$, o que decorre da simetria entre A e P em relação a BD. ∎

2.2. Círculo de Apolônio e quádruplas harmônicas

A própria definição do círculo de Apolônio nos leva à definição de quádruplas harmônicas: sendo T e U as interseções de um círculo de Apolônio de A e B com o segmento que liga esses pontos. Então, de

$$\frac{AT}{BT} = \frac{AU}{BU}$$

concluímos que $\mathcal{H}(AB, TU)$, ou seja, A, B, T e U formam uma quádrupla harmônica. Aqui, usamos a notação de [2].

Observe que a mediatriz de AB pode ser interpretada como uma circunferência que passa pelo ponto do infinito onde todas as retas paralelas a AB se cruzam. Isso corresponde ao caso em que um dos pontos da quádrupla harmônica é o ponto médio de AB.

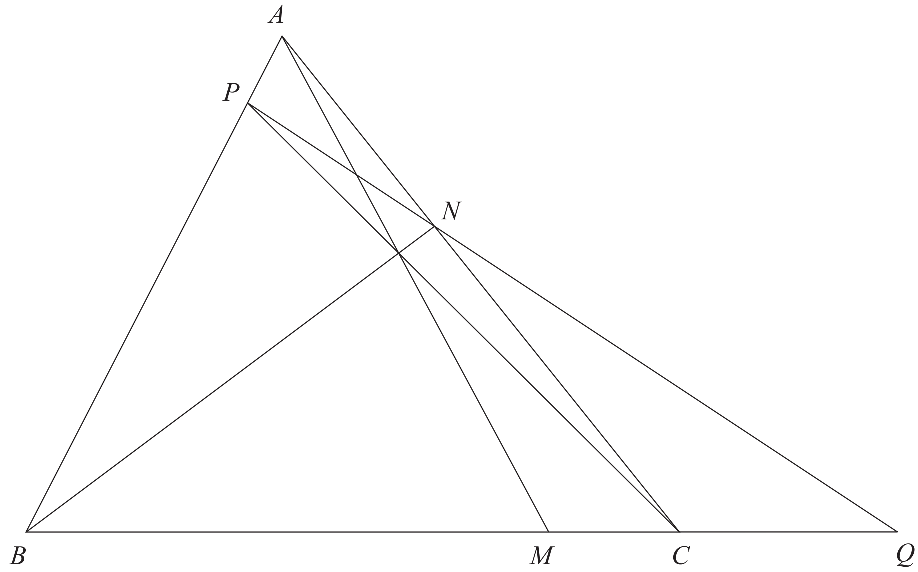
Enquanto círculos de Apolônio fazem aparecer quádruplas harmônicas, podemos pensar no processo inverso, encontrando círculos de Apolônios sem mesmo termos uma proporção entre segmentos.

Como definir quádruplas harmônicas sem contas? Use a definição projetiva!

Lema 2.2. *Seja ABC um triângulo e AM, BN e CP cevianas concorrentes. Se PN corta BC em Q, então MQ é o diâmetro de um círculo de Apolônio de B e C.*

Demonstração

A demonstração decorre da construção do conjugado harmônico de [2], mas a repetimos aqui por completeza.



Do teorema de Ceva no triângulo ABC,

$$\frac{AN}{CN} \cdot \frac{CM}{BM} \cdot \frac{BP}{AP} = 1 \qquad (\star)$$

Aplicando o teorema de Menelaus no triângulo ABC, reta NPQ,

$$\frac{AN}{CN} \cdot \frac{CQ}{BQ} \cdot \frac{BP}{AP} = 1 \qquad (\star\star)$$

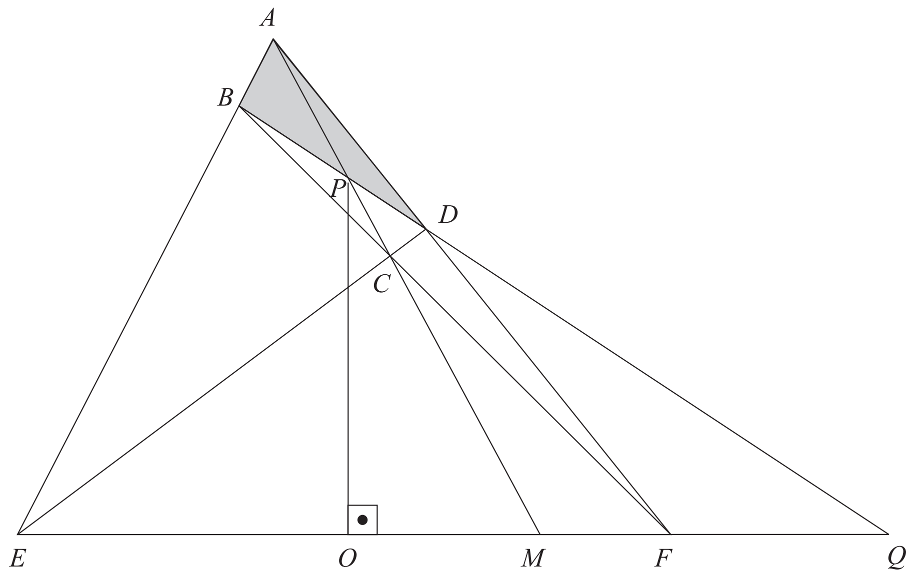
Comparando $(\star)$ e $(\star\star)$, obtemos $\frac{CM}{BM} = \frac{CQ}{BQ}$ e acabou. ∎

Isso é útil em problemas como o próximo exemplo.

Exemplo 2.2.

(Teste de Seleção, China) Sejam E e F as interseções dos lados opostos do quadrilátero convexo $ABCD$, cujas diagonais cortam-se em P. Seja O sobre EF tal que OP é perpendicular a EF. Prove que $\angle BOC = \angle AOD$.

Resolução



Você consegue perceber a semelhança entre as duas últimas figuras? A diferença aqui é que, em vez de considerar a quádrupla ordenada $\mathcal{H}(EF, MQ)$, vamos considerar $\mathcal{H}(BD, PQ)$. Eles são uma quádrupla ordenada por causa das "cevianas" AP, DE e BF do triângulo ABD, que concorrem em C. Por estranho que pareça, o teorema de Ceva ainda funciona para essas cevianas e, portanto, a demonstração do último lema também.

Assim, PQ é diâmetro de um círculo de Apolônio de B e D. Como $\angle POQ$ é reto, O pertence a esse círculo e, do lema sobre bissetrizes, OP é bissetriz de $\angle BOD$, ou seja, $\angle BOP = \angle POD$.

Observando que $\angle BOC = \angle BOP + \angle POC$ e $\angle AOD = \angle POD + \angle AOP$ (se você fez o seu próprio desenho, pode ser que você tenha que trocar ambos os sinais de $+$ por $-$), só falta provar que $\angle AOP = \angle POC$, que é uma igualdade bem análoga à que provamos.

De fato, a demonstração é análoga: agora considere o triângulo ACD e as "cevianas" (ainda mais estranhas) AE, CF e DP, concorrentes em B. Obtemos, então, mais uma quádrupla, ordenada, $\mathcal{H}(AC, PM)$. O resultado, então, segue, já que O também pertence ao círculo de Apolônio de A e C de diâmetro PM. ∎

Alguns exercícios para você praticar.

Exercícios

07. Prove o seguinte

Lema 2.3. *(Círculo de Apolônio e inversão.) Prove que se Γ, de centro O e raio r, é um círculo de Apolônio de A e B, então, ao realizarmos uma inversão com centro O e raio r, A é o inverso de B.*

08. (Teste de Seleção, Sérvia e Montenegro) Sejam M e N pontos distintos do plano do triângulo ABC tais que $AM : BM : CM = AN : BN : CN$. Prove que MN contém o circuncírculo de ABC.

09. Seja I o incentro do triângulo ABC e D a interseção de AI e BC. Seja M um ponto qualquer sobre o circuncírculo de IBC. Prove que a reta MI bissecta o ângulo $\angle AMD$.

10. (Teste de Seleção, EUA) Considere todos os triângulos não isósceles ABC tais que $AC^2 + BC^2 = 2AB^2$. As cevianas CM e CD são respectivamente a mediana e a bissetriz interna relativas a C, com M e D sobre AB. O ponto E é tal que D é o incentro de CEM. Prove que exatamente uma das razões

$$\frac{CE}{EM}, \quad \frac{EM}{MC}, \quad \frac{MC}{CE}$$

é constante.

Dica: prove que se G é o baricentro de ABC então $\frac{GA}{GB} = \frac{CA}{CB}$. Aí G pertence a um círculo especial, não? Considere depois o simétrico de G em relação a AB.

11. (Torneio das Cidades) O ângulo $\angle COD$ foi obtido da rotação do ângulo $\angle AOB$, de modo que OC corresponde a OA e OD, a OB. Dois círculos tangenciam os ângulos $\angle AOB$ e $\angle COD$, respectivamente, e se cortam em E e F. Prove que $\angle AOE = \angle DOF$.

Dica: Sejam O_1 e O_2 os centros dos círculos e r_1 e r_2, os seus respectivos raios. Então $\frac{OO_1}{OO_2} = \frac{r_1}{r_2}$. Mas acontece que há segmentos que medem r_1 e outros que medem r_2.

12. Dado o triângulo ABC, encontre o lugar geométrico dos pontos P interiores ao triângulo tais que

$$\angle APC - \angle ABC = \angle APB - \angle ACB$$

Dica: o lugar geométrico começa com "círculo" e termina com "Apolônio". Use uma inversão com pólo em A.

Observação: com esse resultado, o problema 2 da IMO 1996 é praticamente imediato: Seja P um ponto interior ao triângulo ABC tal que $\angle APC - \angle ABC = \angle APB - \angle ACB$. Sejam D e E os incentros dos triângulos APB e APC, respectivamente. Prove que as retas BD, CE e AP passam por um ponto comum. De qualquer forma, a dificuldade desse problema é igual à do anterior.

3. Rotações e Roto-Homotetias

Ao resolver o problema 5 da IMO 2005, eu notei que muitas pequenas coisas foram cruciais para a sua resolução (pelo menos, a que eu obtive):

(a) Uma ou mais figuras bem-feitas (no meu caso, *três* figuras);

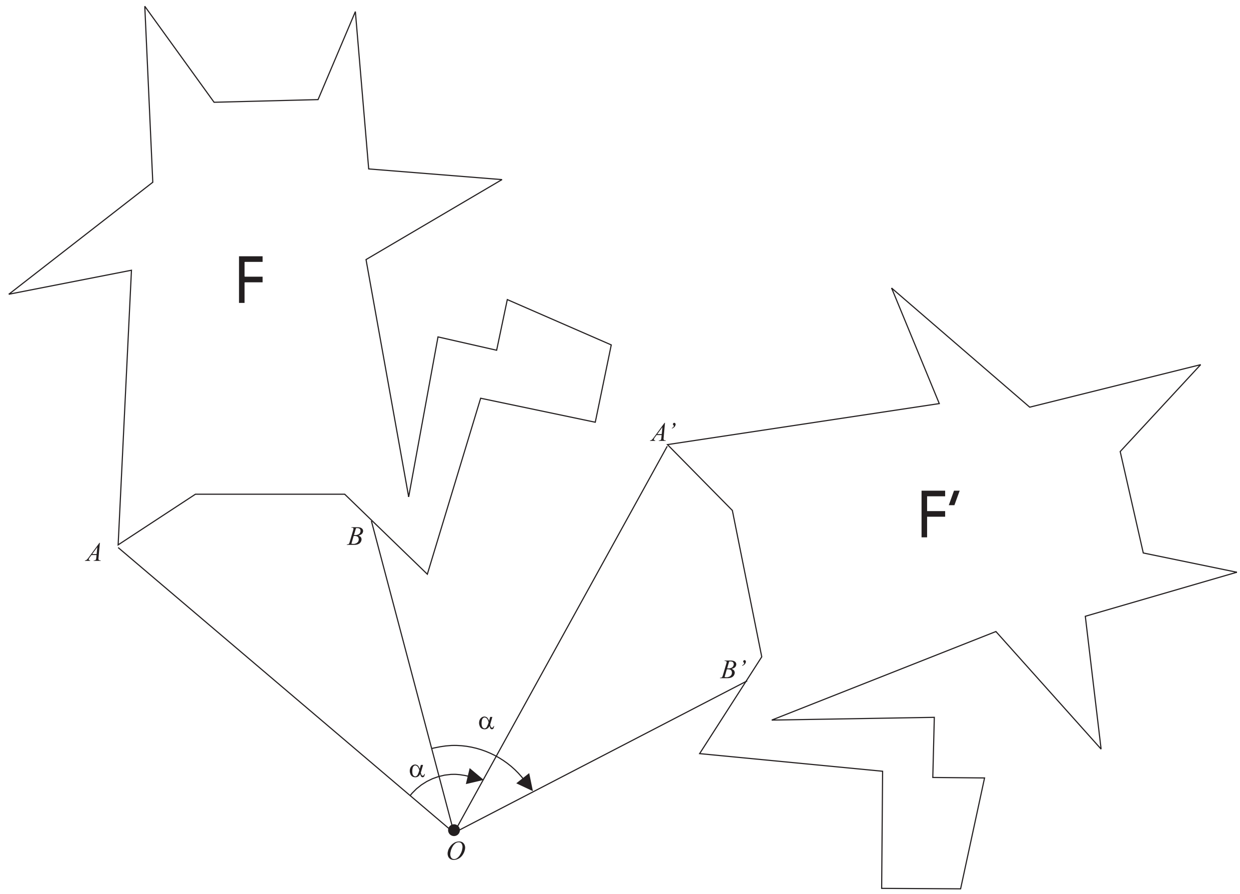
(b) Fazer um chute certeiro;

(c) Uma rotação.

Depois, consegui generalizar o problema de modo que no item (c) trocamos rotação por roto-homotetia.

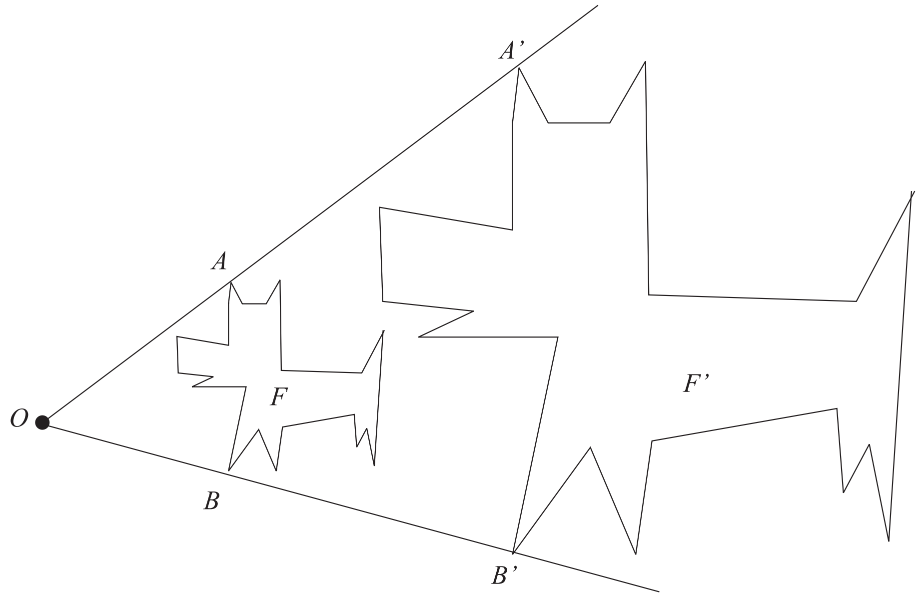
Mas o que é uma rotação? E uma roto-homotetia?

Definição 3.1. *Rotação de uma figura $\mathcal{F}$ de um ângulo α em torno de um centro O no sentido anti-horário (horário) é uma transformação geométrica que associa a cada ponto P de $\mathcal{F}$ o ponto P' tal que $OP = OP'$ e $\angle POP' = \alpha$, sendo este ângulo orientado no sentido anti-horário (horário).*



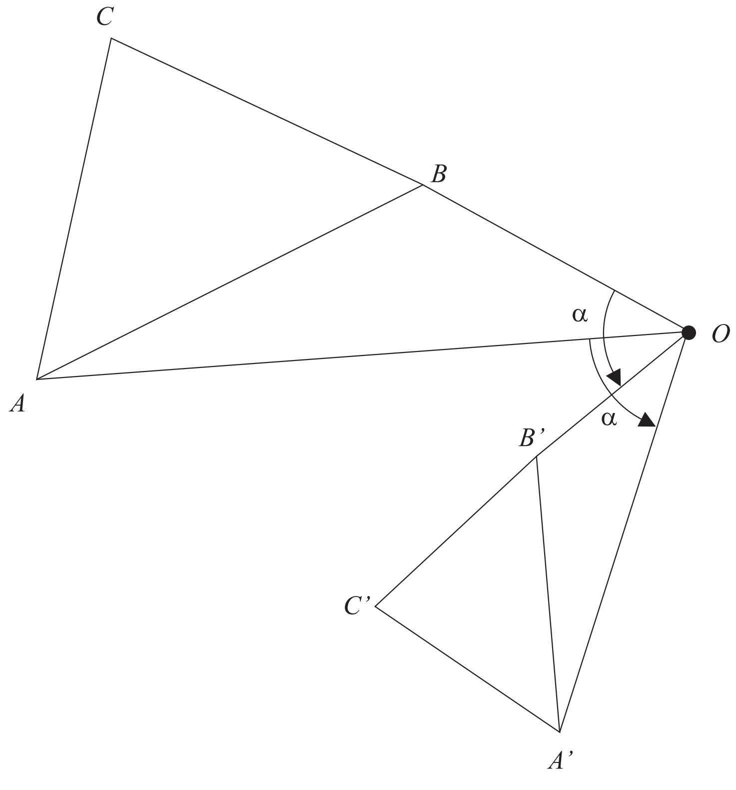
Antes de roto-homotetia, vamos definir homotetia.

Definição 3.2. *Homotetia de uma figura $\mathcal{F}$ com centro O e razão k, sendo k um número real positivo, é uma transformação geométrica que associa a cada ponto P de $\mathcal{F}$ o ponto P' sobre a semi-reta OP, de origem O, tal que $OP' = k \cdot OP$.*



Agora, definir roto-homotetia é simples:

Definição 3.3. *Roto-homotetia de uma figura $\mathcal{F}$ de um ângulo α em torno de um centro O no sentido anti-horário (horário) e razão $k > 0$ é uma transformação geométrica que associa a cada ponto P de $\mathcal{F}$ o ponto P' tal que $OP' = k \cdot OP$ e $\angle POP' = \alpha$, sendo este ângulo orientado no sentido anti-horário (horário). Ou seja, é uma rotação seguida de uma homotetia de mesmo centro.*



OK, agora sabemos o que é roto-homotetia. Mas o que são legais são as suas

3.1. Propriedades

Além da semelhança entre a figura e a imagem, roto-homotetias induzem mais duas semelhanças.

Lema 3.1. *Se uma roto-homotetia (ou rotação) de centro O leva A a A' e B a B', então OAB e $OA'B'$ são semelhantes (ou congruentes), assim como OAA' e OBB'.*

Demonstração

Ambas são decorrentes do caso LAL, pois $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} \iff \frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'}$ e $\angle AOA' = \angle BOB'$ (iguais ao ângulo de rotação) e, portanto, $\angle AOB = \angle A'OB'$ (veja a figura anterior). ∎

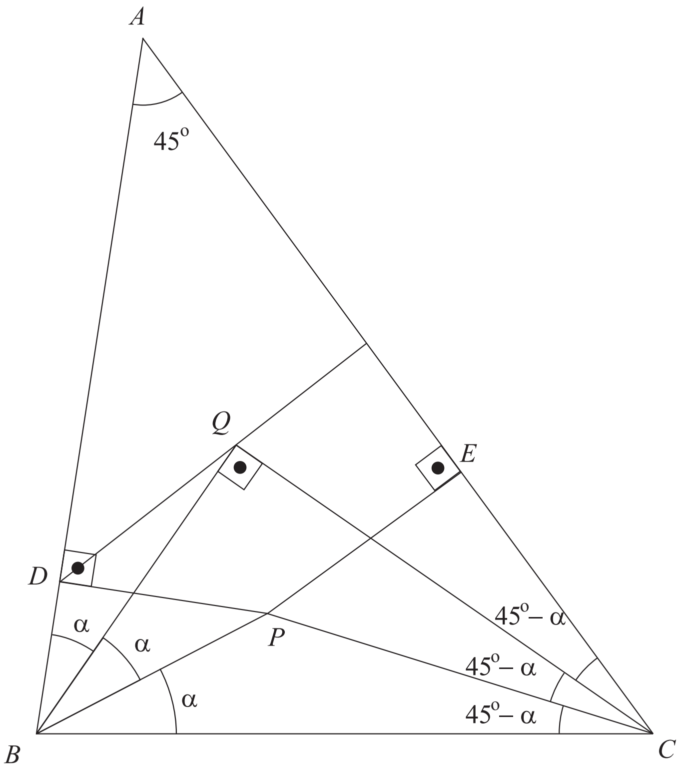
Eu gosto de chamar essas semelhanças de "semelhanças automáticas".

Exemplo 3.1.

(Rioplatense) No triângulo ABC, $\angle BAC = 45°$. P e Q são pontos no interior de ABC tais que $\angle CBP = \angle PBQ = \angle QBA = \angle ABC/3$ e $\angle BCP = \angle PCQ = \angle QCA = \angle ACB/3$. Sejam D e E as projeções ortogonais de P sobre AB e AC, respectivamente. Prove que Q é o ortocentro do triângulo ADE.

Resolução

Seja $\angle ABC = 3\alpha$. Logo $\angle CBP = \angle PBQ = \angle QBA = \alpha$, $\angle ACB = 180° - 45° - 3\alpha = 135° - 3\alpha$ e $\angle BCP = \angle PCQ = \angle QCA = 45° - \alpha$.



Observe que, pelo caso AA, os triângulos DBP e QBC são semelhantes. Ao encontrar uma semelhança, pode ser interessante pensar em alguma roto-homotetia que leve um triângulo ao outro. No caso, existe: a roto-homotetia de centro B, de α no sentido anti-horário e razão $\frac{BP}{BC}$ leva QBC em DBP, ou seja, $D = Q'$ e $P = C'$. Temos, então, a "semelhança automática" entre os triângulos $BQQ' = BQD$ e $BCC' = BCP$ (a justificativa é igual à do lema, e não é nada extraordinário: note que, da semelhança entre DBP e QBC, $\frac{DB}{QB} = \frac{BP}{BC}$, e $\angle DBQ = \angle PBC$).

Mas, enfim, da semelhança, $\angle DQB = \angle PCB = 45° - \alpha$ e, portanto, $\angle QDA = \angle DQB + \angle DBQ = 45° - \alpha + \alpha = 45°$. Logo o ângulo entre as retas DQ e AE é $180° - 45° - 45° = 90°$, ou seja, a reta DQ contém uma altura do triângulo ADE. Analogamente, a reta QE contém outra altura do mesmo triângulo e, conseqüentemente, Q é o ortocentro de ADE. ∎

Exercícios

13. (IMO) Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo e fixado com $BC = DA$ e BC não paralelo a DA. Sejam E e F dois pontos variáveis sobre os interiores dos segmentos BC e DA, respectivamente, tais que $BE = DF$. As retas AC e BD cortam-se em P; as retas BD e EF cortam-se em Q; as retas EF e AC cortam-se em R.

Quando variamos E e F, obtemos diferentes triângulos PQR. Prove que os circuncírculos desses triângulos têm um ponto comum diferente de P.

14. (Cone Sul) Sejam $ABCD$ um quadrado (sentido horário) e P um ponto qualquer pertencente ao interior do segmento BC. Constrói-se o quadrado $APRS$ (sentido horário).

Demonstrar que a reta CR é tangente à circunferência circunscrita ao triângulo ABC.

15. (Alemanha) Dos círculos Γ_1 e Γ_2 interceptam-se em A e B. Uma reta passa por B e corta Γ_1 em $C \neq B$ e Γ_2 em $E \neq B$. Outra reta passa por B e corta Γ_1 em $D \neq B$ e Γ_2 em $F \neq B$. Suponha que B está entre C e E e entre D e F. Sejam M e N os pontos médios de CE e DF, respectivamente.

Prove que os triângulos ACD, AEF e AMN são semelhantes.

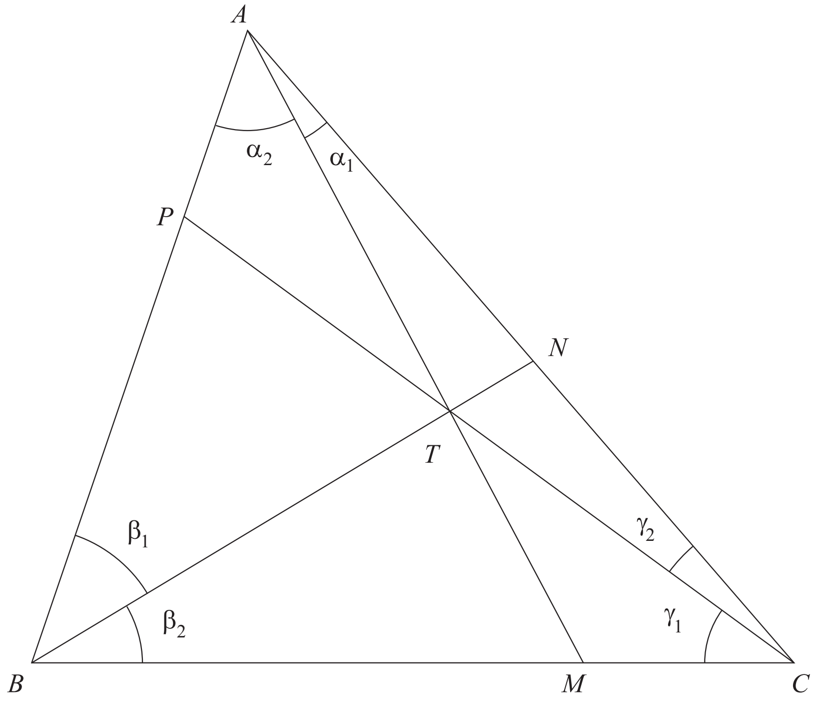
4. Conjugados Isogonais em Relação a um Triângulo

Antes de definir conjugados isogonais, vamos citar e provar um teorema importante e bastante útil para nossos propósitos.

4.1. O Teorema de Ceva Trigonométrico

Teorema 4.1. *Sejam AM, BN e CP cevianas do triângulo ABC. Então essas cevianas são concorrentes se, e somente se,*

$$\frac{\operatorname{sen}\angle CAM}{\operatorname{sen}\angle MAB}\cdot\frac{\operatorname{sen}\angle ABN}{\operatorname{sen}\angle NBC}\cdot\frac{\operatorname{sen}\angle BCP}{\operatorname{sen}\angle PCA} = 1$$



Uma maneira simples de memorizar a relação acima é marcar os ângulos α_1, α_2, β_1, β_2, γ_1, γ_2 como na figura acima, em sentido horário, e escrever

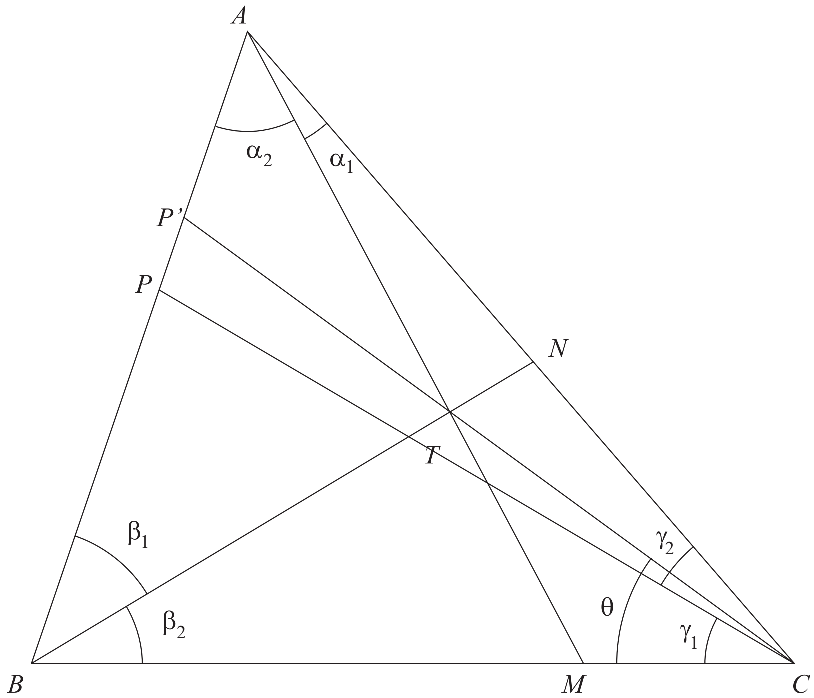
$$\frac{\operatorname{sen}\alpha_1}{\operatorname{sen}\alpha_2}\cdot\frac{\operatorname{sen}\beta_1}{\operatorname{sen}\beta_2}\cdot\frac{\operatorname{sen}\gamma_1}{\operatorname{sen}\gamma_2}=1$$

Demonstração

Para a demonstração da ida, basta aplicar a lei dos senos nos triângulos ATB, BTC e CTA e multiplicar as relações obtidas

$$\frac{TA}{TB}=\frac{\operatorname{sen}\beta_1}{\operatorname{sen}\alpha_2},\quad \frac{TB}{TC}=\frac{\operatorname{sen}\gamma_1}{\operatorname{sen}\beta_2},\quad \frac{TC}{TA}=\frac{\operatorname{sen}\alpha_1}{\operatorname{sen}\gamma_2}$$

A volta é um pouco mais trabalhosa, mas é análoga à demonstração (sintética) do outro teorema de Ceva. Suponha, por absurdo, que a relação vale mas que as cevianas não são concorrentes. Trace, então, uma ceviana CP' que passa pela interseção de AM e BN, e sejam $\theta=\angle BCP'$ e $\gamma=\gamma_1+\gamma_2$, de modo que $\angle P'CA=\gamma-\theta$ e $\gamma_2=\gamma-\gamma_1$.



Da ida que já demonstramos,

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha_1}{\operatorname{sen}\alpha_2}\cdot\frac{\operatorname{sen}\beta_1}{\operatorname{sen}\beta_2}\cdot\frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}(\gamma-\theta)}=1$$

Além disso, por hipótese

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha_1}{\operatorname{sen}\alpha_2}\cdot\frac{\operatorname{sen}\beta_1}{\operatorname{sen}\beta_2}\cdot\frac{\operatorname{sen}\gamma_1}{\operatorname{sen}\gamma_2}=1$$

Comparando as duas últimas equações e substituindo $\gamma_2=\gamma-\gamma_1$, obtemos

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}(\gamma-\theta)}=\frac{\operatorname{sen}\gamma_1}{\operatorname{sen}(\gamma-\gamma_1)}$$

Invertendo e aplicando o bom e velho truque da co-tangente:

$$\operatorname{sen}\gamma \operatorname{cotg}\theta - \cos\gamma = \operatorname{sen}\gamma \operatorname{cotg}\gamma_1 - \cos\gamma \iff \operatorname{cotg}\theta = \operatorname{cotg}\gamma_1 \iff \theta = \gamma_1$$

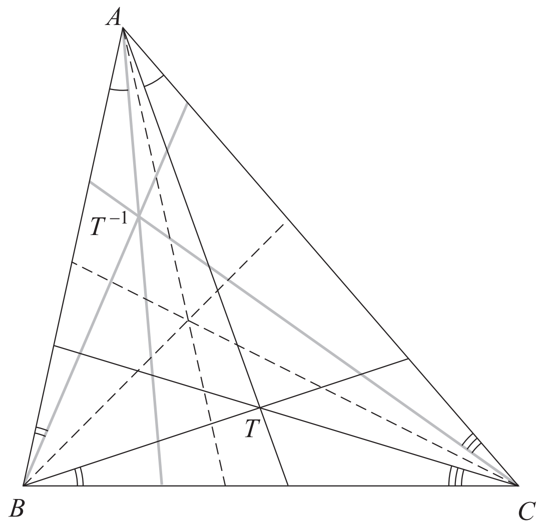
∎

Vale ressaltar que, sendo cotg uma função injetora em $]0;\pi[$, o teorema acima, a exemplo do outro teorema de Ceva, vale quando T está fora do triângulo ABC também.

Estamos prontos para definir conjugados isogonais.

Definição 4.1. *Dado um triângulo ABC, o conjugado isogonal em relação a ABC de um ponto T do plano de ABC é obtido refletindo as retas TA, TB e TC em relação às bissetrizes internas de ABC que passam por A, B e C, respectivamente. As retas resultantes são concorrentes no isogonal T^{-1} de T.*

A seguir, as linhas pontilhadas são as bissetrizes, e as cevianas cinzas são as reflexões das cevianas pretas.



Por que as cevianas cinzas são concorrentes? Isso decorre de duas aplicações do teorema de Ceva trigonométrico: primeiro com as cevianas concorrentes em T e depois, com as cevianas concorrentes em T^{-1}, que formam os mesmos ângulos que as outras cevianas, porém no sentido contrário.

Na verdade, pode ocorrer de as três cevianas serem paralelas. Isso ocorre se, e somente se, T está sobre o circuncírculo de ABC; nesse caso, pensamos projetivamente, ou seja, o conjugado isogonal é um ponto do infinito.

Aliás, dois pontos bastantes conhecidos são conjugados isogonais: o circuncentro e o ortocentro. Tente provar isso.

4.2. Para que servem isogonais?

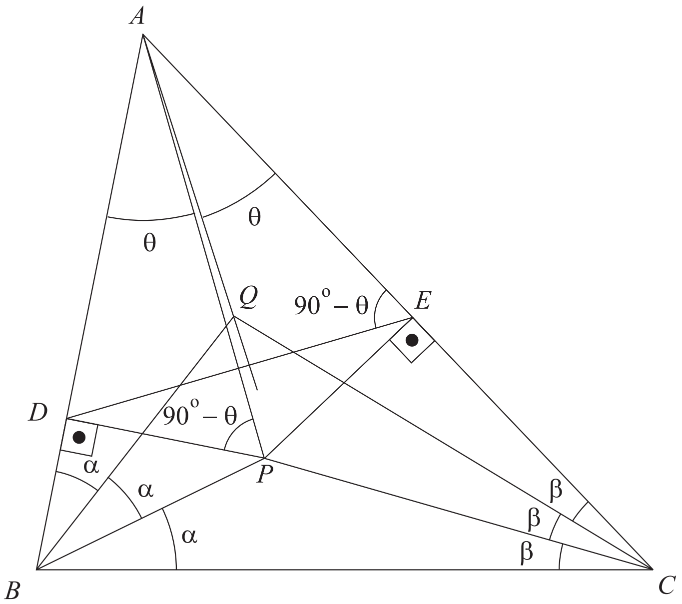
O que é mais útil em conjugados isogonais é simplesmente que as cevianas são reflexões umas das outras em relação às bissetrizes, e isso costumam levar a algumas igualdades entre ângulos um pouco mais difíceis de obter ou mesmo de se imaginar com contas.

Exemplo 4.1.

Voltemos à situação do exemplo de roto-homotetia, da Rioplatense. Suponha agora que o ângulo $\angle BAC$ não meça necessariamente $45°$. É esperar muito que o ponto Q seja ortocentro de ADE e, de fato, nem sempre é. Mas a reta AQ ainda é perpendicular a DE. Prove esse fato.

Resolução

Seja $\theta = \angle PAD$. Então $\angle APD = 90° - \theta$ e, como $\angle ADP$ e $\angle AEP$ são retos, o quadrilátero $ADPE$ é inscritível. Logo $\angle AED = \angle APD = 90° - \theta$.



Olhando a figura, note que basta provarmos que $\angle QAC = \theta$. Aí é que entram os conjugados isogonais. Como $\angle PBC = \angle QBA$ e $\angle BCP = \angle QCA$, os pares de retas $BP; BQ$ e $CP; CQ$ são simétricos entre si em relação às bissetrizes de $\angle ABC$ e $\angle ACB$, respectivamente. Ou seja, P e Q são conjugados isogonais e, portanto, $\angle PAB$ e $\angle QAC$ também são iguais. Logo $\angle QAC = \theta$ e o ângulo entre as retas AQ e DE é $180° - \theta - (90 - \theta) = 90°$. ∎

Note que para provar o resultado na conta, bastaria repetir a demonstração da volta do teorema de Ceva trigonométrico. Mas o que é mais interessante é que, sabendo da existência dos conjugados isogonais, é *natural* pensar nessa solução. Em contraste, fazer a conta sem pensar em conjugados isogonais não parece ser tão natural assim. Então dá para pensar que os conjugados isogonais nos economizou não só fazer a conta, mas mostrou *onde* fazer as contas relevantes.

O próximo exemplo mostra o verdadeiro poder dos conjugados isogonais.

Exemplo 4.2.

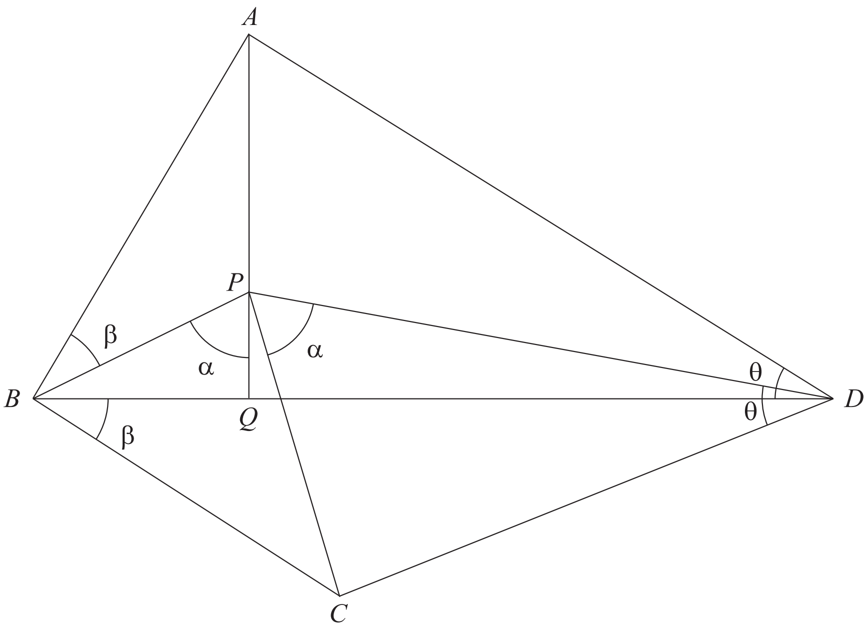
(IMO) Num quadrilátero convexo $ABCD$ a diagonal BD não é bissetriz do ângulo $\angle ABC$ nem do ângulo $\angle CDA$. Um ponto P no interior de $ABCD$ satisfaz

$$\angle PBC = \angle DBA \quad \text{e} \quad \angle PDC = \angle BDA.$$

Prove que os vértices do quadrilátero $ABCD$ pertencem a uma mesma circunferência se, e somente se, $AP = CP$.

Resolução

Na figura a seguir, prolongamos AP de modo que encontre BD em Q.



Note que, de acordo com as marcações da figura, $\angle BPQ = \angle CPD$. Isso ocorre porque, sendo $\angle PBC = \angle DBA$ e $\angle PDC = \angle BDA$, os pares de retas $BA; BC$ e $DA; DC$ são simétricos em relação às bissetrizes de $\angle PBD$ e $\angle PDB$, respectivamente. Assim, os pontos A e C são conjugados isogonais em relação ao triângulo BPD e, portanto, as retas PA e PC são simétricas em relação à bissetriz de $\angle BPD$ e realmente temos $\angle BPQ = \angle CPD$.

Caso você queira identificar as ternas de cevianas respectivamente isogonais, elas são PC, BC, DC e PA, BA, DA.

Agora, algumas contas terminam o problema: aplicando a lei dos senos aos triângulos APB e CPD, temos

$$\frac{AP}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{AB}{\operatorname{sen}\alpha} \quad \text{e} \quad \frac{CP}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{CD}{\operatorname{sen}\alpha}$$

Dividindo membro a membro e denotando R_{XYZ} o circunraio do triângulo XYZ, obtemos

$$\frac{AP\operatorname{sen}\theta}{CP\operatorname{sen}\beta} = \frac{AB}{CD} \iff \frac{AP}{CP} = \frac{\frac{AB}{\operatorname{sen}\theta}}{\frac{CD}{\operatorname{sen}\beta}} \iff \frac{AP}{CP} = \frac{R_{ABD}}{R_{BCD}} \qquad (\bullet)$$

Além disso, supondo sem perda de generalidade que P está no interior do triângulo ABD, temos $\angle ABD > \angle CBD$ e $\angle ADB > \angle CDB$. Portanto $180° - \angle ABD - \angle ADB < 180° - \angle CBD - \angle CDB \iff \angle BAD < \angle BCD$.

Note que tudo o que fizemos até agora *não depende de ABCD ser inscritível ou de* $PA = PC$, ou seja, não assumimos nenhuma das hipóteses da afirmação que queremos provar.

Somente agora vamos provar a afirmação do enunciado: de $(\bullet)$

$$PA = PC \iff R_{ABD} = R_{BCD}$$

Isto é, os circuncírculos dos triângulos ABD e BCD, de lado comum BD, têm o mesmo raio. Isso quer dizer que ou os circuncírculos coincidem ou são simétricos em relação a BD. Mas essa última possibilidade implica $\angle BAD = \angle BCD$, que já vimos que não é possível. ∎

Exercícios

16. Prove que o ortocentro e o circuncentro de um triângulo são conjugados isogonais em relação ao mesmo triângulo.

17. Sejam T e T^{-1} pontos conjugados isogonais em relação ao triângulo ABC. Prove que as seis projeções ortogonais de T e T^{-1} sobre os lados (ou prolongamentos) de ABC pertencem a um círculo com centro no ponto médio de TT^{-1}.

Note que esse último problema generaliza o círculo dos nove pontos.

18. (Irã) Os pontos M e M' são conjugados isogonais no triângulo ABC. Sejam P, Q e R as projeções ortogonais de M sobre as retas BC, AC e BC, respectivamente. Defina P', Q', R' analogamente para M'. As retas QR e $Q'R'$ cortam-se em D; RP e $R'P'$ cortam-se em E; e PQ e $P'Q'$ cortam-se em F. Prove que as retas AD, BE e CF são paralelas.

Dica: use o exercício anterior.

5. Referências Bibliográficas

[1] Carlos Shine, *Geometria com Contas*, Revista Eureka! 17. Uma boa introdução para quem quer começar a fazer problemas de geometria com trigonometria e geometria analítica. Lá tem bastantes problemas, incluindo alguns da IMO e alguns exemplos desse artigo.

[2] Luciano Castro, *Introdução à Geometria Projetiva*, Revista Eureka! 8. Tudo o que você precisa saber sobre geometria projetiva e resolver problemas de olimpíadas.

[3] Fórum Mathlinks, `http://www.mathlinks.ro/`. Tirei muitos problemas de lá, e algumas soluções também. Em particular, tem um curso bem detalhado com várias propriedades de conjugados isogonais em

`http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=18472`.

[4] Mais informações sobre círculo de Apolônio e conjugados isogonais podem ser encontradas no *Mathworld*, da Wolfram, mais especificamente em

`http://mathworld.wolfram.com/ApolloniusCircle.html`

e

`http://mathworld.wolfram.com/IsogonalConjugate.html`

Por fim, gostaria de agradecer ao professor Edmilson Motta por revisar o artigo e fazer sugestões construtivas, além de todo o apoio.