Séries formais

"Estou trabalhando em $Z[[x,y]]$,
portanto não me perturbem com questões de convergência!"
A. Mandel

Um polinômio é uma expressão da forma

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n.$$

Uma *série formal* é uma expressão ainda mais simples—basta apagar o último termo:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$$

Somas e produtos são definidos de maneira análoga às operações correspondentes com polinômios. Assim, por exemplo,

$$\begin{aligned}(1 - 3x + 3^2x^2 - 3^3x^3 + \cdots)(1 + 3x) &= 1 - 3x + 3^2x^2 - 3^3x^3 + \cdots \\ &\quad + 3x - 3^2x^2 + 3^3x^3 - \cdots \\ &= 1\end{aligned}$$

de modo que podemos escrever $1 - 3x + 3^2x^2 - 3^3x^3 + \cdots = 1/(1 + 3x)$. De maneira geral, podemos "compactar" uma série formal $1 + ax + a^2x^2 + \cdots$ na forma $1/(1 - ax)$, que certamente ocupa bem menos espaço que uma série infinita...

Vejamos uma primeira aplicação das séries formais. Vamos determinar uma "fórmula fechada" para a seqüência definida por $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ e $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ para $n \geq 0$. A idéia é considerar a série formal $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$ e tentar "compactá-la" e depois "descompactá-la". Para alcançar o primeiro objetivo, observe que

$$\begin{aligned}f(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots \\ -5xf(x) &= - 5a_0x - 5a_1x^2 - 5a_2x^3 + \cdots \\ 6x^2f(x) &= \; 6a_0x^2 + 6a_1x^3 + \cdots\end{aligned}$$

Somando as equações acima, os coeficientes de x^n, $n \geq 3$, anulam-se e ficamos com

$$(1 - 5x + 6x^2)f(x) = a_0 + (a_1 - 5a_0)x \iff f(x) = \frac{x}{1 - 5x + 6x^2}$$

Agora, como descompactar $f(x)$? O truque aqui é "quebrá-lo" em pedaços que sabemos como descompactar. Observe que $1 - 5x + 6x^2 = (1 - 2x)(1 - 3x)$ e que é razoável procurar constantes a e b tais que

$$\frac{a}{1 - 2x} + \frac{b}{1 - 3x} = \frac{x}{1 - 5x + 6x^2} \iff \frac{(a + b) - (3a + 2b)x}{(1 - 2x)(1 - 3x)} = \frac{x}{1 - 5x + 6x^2}$$

$$\iff \begin{cases} a + b = 0 \\ 3a + 2b = -1 \end{cases} \iff a = -1 \text{ e } b = 1$$

Logo

$$f(x) = \frac{x}{1 - 5x + 6x^2} = \frac{1}{1 - 3x} - \frac{1}{1 - 2x} = (1 + 3x + 3^2x^2 + 3^3x^3 + \cdots) - (1 + 2x + 2^2x^2 + 2^3x^3 + \cdots)$$

$$= (3^0 - 2^0) + (3^1 - 2^1)x + (3^2 - 2^2)x^2 + (3^3 - 2^3)x^3 + \cdots$$

Assim, o coeficiente de x^n em $f(x)$ (denotado $[x^n]\ f(x)$) é $3^n - 2^n$. Mas $[x^n]\ f(x) = a_n$, pela definição de $f(x)$, logo $a_n = 3^n - 2^n$.

A soma infinita em $f(x)$ é puramente formal, em que as potências de x servem como "marcadores", com x^n marcando a n-ésima posição nesta série. Se quiséssemos, poderíamos escrever séries formais como seqüências infinitas, definindo soma e produto de seqüências como

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots) + (b_0, b_1, b_2, \ldots) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots)$$

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots) \cdot (b_0, b_1, b_2, \ldots) = (a_0b_0, a_0b_1 + a_1b_0, a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0, \ldots)$$

e refazendo todas as contas anteriores com esta notação, que além de esdrúxula, acaba por esconder o jogo. A escolha é sua...

Podemos considerar séries formais com mais de uma variável, com somas e produtos definidos de maneira usual. O conjunto das séries formais com coeficientes em Q é denotado $Q[[x]]$, em analogia ao conjunto dos polinômios com coeficientes racionais em x, $Q[x]$.

▸ **PROBLEMA 1**

Utilizando séries formais, encontre "fórmulas fechadas" para as seguintes seqüências:

(a) $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ para $n \geq 0$ (esta é a famosa *seqüência de Fibonacci*)

(b) $t_0 = t_1 = 1$, $t_{n+2} = -2t_{n+1} - 4t_n$ para $n \geq 0$

(c) $p_0 = p_1 = 1$, $p_2 = 0$, $p_{n+3} = 7p_{n+1} - 6p_n$ para $n \geq 0$

(as outras seqüencias não têm nome. Alguma sugestão?)

▸ **PROBLEMA 2**

Calcule

$$\frac{F_0}{10^0} + \frac{F_1}{10^1} + \frac{F_2}{10^2} + \frac{F_3}{10^3} + \cdots$$

em que F_n denota a seqüência de Fibonacci.

Outra aplicação das séries formais é ajudar a contar. Neste contexto, as séries formais recebem o nome de *funções geratrizes*. O esquema geral é o seguinte: o expoente de x quantifica alguma propriedade em que estamos interessados, como o comprimento de uma seqüência, o número de conjuntos em uma partição, a quantidade de duendes verdes em um jardim, etc. Se para cada objeto associarmos tal potência de x e somarmos estas potências, o coeficiente de x^n será, respectivamente, o número de objetos com comprimento n, o número de partições com n conjuntos, o números de jardins com n duendes verdes, etc.

Por exemplo, considere o problema de determinar o número de maneiras de se escrever n como soma de termos 1, 2, 3, sem levar em conta a ordem dos termos. A idéia aqui não é tentar obter este número para um valor particular de n. Somos mais ousados: vamos obter *todos* estes números de uma só vez. Para isto, escrevemos a função geratriz $f(x)$ que é a soma das potências x^s para cada soma s:

$$f(x) = x^0 + x^1 + x^{1+1} + x^2 + x^{1+1+1} + x^{1+2} + x^3 + \cdots = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots$$

(x^0 corresponde à soma sem nenhum termo), de modo que, por exemplo, o coeficiente de x^3 é o número de maneiras de escrever 3 como soma não ordenada de termos 1, 2, 3. Aparentemente, obter $f(x)$ é uma tarefa mais difícil do que a inicial. Mas observe que cada termo de $f(x)$ é o produto de um termo da forma $x^{\text{somas de 1's}}$, um termo da forma $x^{\text{somas de 2's}}$ e um termo da forma $x^{\text{somas de 3's}}$, logo

$$f(x) = (x^0 + x^1 + x^{1+1} + x^{1+1+1} + \cdots)(x^0 + x^2 + x^{2+2} + x^{2+2+2} + \cdots)(x^0 + x^3 + x^{3+3} + x^{3+3+3} + \cdots)$$

$$\iff f(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots)(1 + x^3 + x^6 + x^9 + \cdots)$$

$$\iff f(x) = \frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x^2}\frac{1}{1-x^3}$$

O problema agora é encontrar $[x^n]\, f(x)$, o que pode ser feito utilizando-se as técnicas já vistas.

▸ **PROBLEMA 3**

Mostre que o número de partições não ordenadas de n com exatamente k termos distintos é

$$[x^n y^k] \prod_{j \geq 1} \frac{1 + x^j(y-1)}{1 - x^j}$$

▸ **PROBLEMA 4**

(a) Encontre constantes a, b, c, d, e, f tais que

$$f(x) = \frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x^2}\frac{1}{1-x^3} = \frac{a}{(1-x)^3} + \frac{b}{(1-x)^2} + \frac{c}{1-x} + \frac{d}{1+x} + \frac{e}{1-\omega x} + \frac{f}{1-\omega^2 x}$$

em que $\omega = (-1 + i\sqrt{3})/2$.

(b) Mostre que

$$[x^n]\, f(x) = \frac{(n+3)^2}{12} - \frac{7}{12} + \frac{(-1)^n}{8} + \frac{\omega^n + \omega^{2n}}{9} = \left\lfloor \frac{n^2}{12} + \frac{1}{2} \right\rfloor$$

em que $\lfloor x \rfloor$ denota o maior inteiro menor ou igual a x.

▸ **PROBLEMA 5**

(a) Determine a função geratriz do número de soluções da equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$, em que x_i são inteiros positivos, $1 \le x_i \le k$.

(b) Determine a função geratriz do número de partições ordenadas de n. (por exemplo, $4 = 1+3 = 3+1 = 2+2 = 2+1+1 = 1+2+1 = 1+1+2 = 1+1+1+1$, de modo que há 8 partições ordenadas de 4)

(c) Determine o número de partições ordenadas de n.

Os próximos problemas mostram uma técnica muito importante chamada *convolução*. Ela se baseia no seguinte fato: se

$$f(x) = f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + f_3 x^3 + \cdots$$
$$g(x) = g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + g_3 x^3 + \cdots$$

então $h(x) = f(x)g(x)$ é a série formal associada à seqüência $h_0 = f_0 g_0$, $h_1 = f_0 g_1 + f_1 g_0$, $h_2 = f_0 g_2 + f_1 g_1 + f_2 g_0$, $\ldots$, $h_k = \sum_{i+j=k} f_i g_j$, $\ldots$.

▸ **PROBLEMA 6**

(a) Mostre que se $f(x)$ é a função geratriz da seqüência $(a_n)_{n\ge 0}$, então $f(x)/(1-x)$ é a função geratriz da seqüência $b_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$.

(b) Prove que
$$F_0 + F_1 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1,$$
em que F_n denota a seqüência de Fibonacci. (Este resultado pode também ser provado facilmente sem o uso de séries formais. Tente!)

▸ **PROBLEMA 7**

Prove que
$$\binom{n}{n} F_0 + \binom{n}{n-1} F_1 + \binom{n}{n-2} F_2 + \cdots + \binom{n}{0} F_n = F_{2n}$$
em que, adivinhe, F_n denota a seqüência de Fibonacci!

▸ **PROBLEMA 8**

(a) Mostre que o número de triangulações T_n (por diagonais que não se interceptam fora dos vértices) de um polígono convexo de n vértices satisfaz
$$T_{n+1} = T_2 T_n + T_3 T_{n-1} + \cdots + T_n T_2$$
em que $T_2 = 1$.

(b) Prove que
$$T(x) = T_2 + T_3 x + T_4 x^2 + \cdots = \frac{1 - (1-4x)^{\frac{1}{2}}}{2x}$$

(c) Mostre que
$$T_n = \frac{1}{n-1}\binom{2n-2}{n-1}$$
(T_{n+1} é o assim chamado n-ésimo número de Catalan).

Muitas vezes, as funções geratrizes são utilizadas não para calcular o número exato de maneiras de se fazer isto ou aquilo, mas para mostrar que duas quantidades são iguais. Vamos mostrar que o número de partições (não ordenadas) de n em naturais distintos é igual ao número de partições (também não ordenadas) de n em naturais ímpares. Por exemplo, $7 = 5+1+1 = 3+3+1 = 3+1+1+1+1 = 1+1+1+1+1+1+1$ e $7 = 6+1 = 5+2 = 4+3 = 4+2+1$, de modo que em ambos os casos o número de partições é 5.

Temos que a função geratriz que conta o número de partições em naturais distintos é
$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)\ldots$$
enquanto que o número de partições em naturais ímpares é dado por
$$\begin{aligned} &(1 + x + x^{1+1} + x^{1+1+1} + \cdots)(1 + x^3 + x^{3+3} + x^{3+3+3} + \cdots)\ldots(1 + x^5 + x^{5+5} + x^{5+5+5} + \cdots)\ldots \\ &= (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)(1 + x^3 + x^6 + x^9 + \cdots)(1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + \cdots)\ldots \\ &= \frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x^3}\frac{1}{1-x^5}\cdots \end{aligned}$$

Observe que as expressões acima são iguais! De fato, para se convencer disto, basta multiplicar as igualdades
$$\frac{1-x^2}{1-x} = 1+x, \quad \frac{1-x^4}{1-x^2} = 1+x^2, \quad \frac{1-x^6}{1-x^3} = 1+x^3, \ldots$$
Isto completa a demonstração.

▸ **PROBLEMA 9**

(a) Escreva a função geratriz do número de maneiras de escrever um número n como soma de potências distintas de 2.

(b) Verifique que a função acima é igual a $1/(1-x)$.

(c) Utilizando os resultados acima, mostre que todo número pode ser escrito de maneira única em base 2.

▸ **PROBLEMA 10**

Prove que o número de partições de n em que apenas as partes ímpares podem ser repetidas é igual ao número de partições de n em que nenhuma parte aparece mais do que três vezes.

▸ **PROBLEMA 11**

Prove que o número de partições de n com uma única parte menor (ela ocorre uma única vez) e parte maior no máximo duas vezes a parte menor é igual ao número de partições de n em que a maior parte é ímpar e a menor parte é maior do que metade da parte maior.

▸ **PROBLEMA 12**

Mostre que o número total de 1's nas partições de n é igual à soma dos números de partes distintas em cada partição de n.