Existe, mas não sei exibir!

Você já teve aquela sensação do tipo “ei, isso deve existir, mas não sei exibir um exemplo” quando resolvia algum problema? O fato é que alguns problemas existenciais são resolvidos sem exibir um exemplo. Vamos ver algumas técnicas para problemas desse tipo.

1. “Se não existir, dá errado”: redução ao absurdo

Quando se tem aquele sentimento “não é possível não existir!”, uma ideia é pensar “o que vai acontecer se não existir?” Muitas vezes isso limita bastante as possibilidades, e aplicamos a redução ao absurdo.

Exemplo 1.1.

Mostre que se há 2009 pessoas em uma festa, então duas delas conhecem o mesmo número de pessoas entre as presentes.

Resolução

A quantidade de pessoas que uma pessoa conhece (não contando ela mesma!) pode ser 0, 1, 2, ..., 2008, que são 2009 possibilidades. Então se todas as pessoas conhecem quantidades diferentes de pessoas, essas quantidades devem ser as listadas. Mas nesse caso existe uma pessoa que conhece as 2008 outras, inclusive a que não conhece ninguém, o que não é possível. ∎

Exemplo 1.2.

(Rússia 2005, adaptado) Colocamos, em cada casa de um tabuleiro 10×10, o número 0, 1, 2 ou 3. No tabuleiro devem ficar 25 de cada um dos números. Mostre que existem duas casas vizinhas (pode ser na horizontal, vertical ou diagonal) que contêm dois números com soma múltipla de 4.

Resolução

Divida o tabuleiro em 25 quadradinhos 2×2. Note que duas casas no mesmo quadradinho 2×2 são vizinhas. Suponha que não dá certo, ou seja, que não existe tal par. Então não podem ficar dois 2s ou dois 0s no mesmo quadradinho (senão aparece soma $2 + 2 = 4$ ou $0 + 0 = 4$). Como há exatamente 25 de cada número, cada quadradinho tem exatamente um 2 e um 0.

Além disso, não podem ficar no mesmo quadradinho um 1 e um 3 (senão aparece $1 + 3 = 4$), então cada quadradinho tem um 2, um 0 e dois 1s ou um 2, um 0 e dois 3s. Assim, como os 1s e 3s aparecem aos pares, há uma quantidade par de 1s e 3s no total. Mas isso é impossível, pois esse total é igual a 25, que é ímpar.

Portanto, se não existir, não dá certo. Isso quer dizer que existem as duas casinhas que queremos. ∎

Exercícios

01. (OBM 2007) Considere a tabela a seguir com quatro linhas (fileiras horizontais) e quatro colunas (fileiras verticais) a qual está preenchida com números naturais, ocorrendo repetições de números:

1	0	0	3
5	1	2	4
1	1	2	3
6	1	4	0

Ao somarmos cada uma de suas linhas (L1, L2, L3 e L4) e colunas (C1, C2, C3 e C4) obtemos 8 números distintos: 3, 4, 7, 8, 10, 11, 12, 13. Veja:

	C1	C2	C3	C4	Soma da linha
L1	1	0	0	3	4
L2	5	1	2	4	12
L3	1	1	2	3	7
L4	6	1	4	0	11
Soma da coluna	13	3	8	10	

Apresente, se for possível:

(a) uma tabela com 4 linhas e 4 colunas, formada por números naturais, podendo ocorrer repetições de números, na qual apareçam como somas de linhas ou colunas os números de 1 a 8.

(b) uma tabela com 8 linhas e 8 colunas, formada por números naturais, podendo ocorrer repetições de números, na qual apareçam como somas de linhas ou colunas os números de 1 a 16.

(c) uma tabela com 9 linhas e 9 colunas, formada por números naturais, podendo ocorrer repetições de números, na qual apareçam como somas de linhas ou colunas os números de 1 a 18.

Atenção: caso seja impossível montar alguma tabela, você deve explicar por quê.

02. (Problema 4, IMO 2001) Seja n um inteiro ímpar maior do que 1 e sejam $k_1, k_2, \ldots, k_n$ inteiros dados. Para cada uma das $n!$ permutações $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de $\{1, 2, \ldots, n\}$, defina

$$S(a) = \sum_{i=1}^{n} k_i a_i$$

Prove que existem duas permutações b e c, $b \neq c$, tais que $n!$ é um divisor de $S(b) - S(c)$.

Permutação de um conjunto é uma ordenação dos elementos do conjunto; $n!$ é o produto dos n inteiros de 1 a n; o símbolo $\sum$ indica que queremos somar números. Por exemplo, para $n = 3$, $k_1 = 1$, $k_2 = -2$, $k_3 = 5$ e $a = (1, 3, 2)$, $S(a) = 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 3 + 5 \cdot 2$; há $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ permutações: $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 3)$, $(2, 3, 1)$, $(3, 1, 2)$ *e* $(3, 2, 1)$.

2. "Tem um monte desses, então...": casa dos pombos

Um método de provar que existem duas coisas com as mesmas características é o princípio da casa dos pombos:

Princípio da Casa dos Pombos. *Se há $n + 1$ pombos para serem distribuídos em n casas, então há pelo uma casa com pelo menos dois pombos.*

Talvez a seguinte formulação intuitiva seja mais fácil de guardar:

Princípio da Casa dos Pombos (intuitivo). *Se há muitos pombos para poucas casas, alguma casa vai ter muitos pombos. E se há poucos pombos para muitas casas, haverá uma (ou até muitas!) casa(s) vazia(s).*

A parte mais difícil, na verdade, é definir o que vai ser "casa" e o que vai ser "pombo".

Exemplo 2.1.

Dado um conjunto de 13 pessoas, pelo menos duas delas aniversariam no mesmo mês (você consegue ver por quê?). ∎

Exemplo 2.2.

(OBM 1991) Mostre que existe um número da forma $199\ldots91$ (com mais de dois noves) que é múltiplo de 1991.

Resolução

Nesse problema, precisamos de um pouco mais de imaginação. Considere *todos os infinitos* números da forma $199\ldots91$, com mais de três noves. Como há infinitos números (esses são os pombos) e o resto da divisão de qualquer número inteiro por 1991 é um dos números $0, 1, 2, \ldots, 1990$ (essas são as casas), então dois números deixam o mesmo resto. Se subtrairmos esses números obtemos um número múltiplo de 1991 (os restos "cortam"). Assim, existem k e ℓ tais que $1\underbrace{99\ldots9}_{k}1 - 1\underbrace{99\ldots9}_{\ell}1 = 199\ldots9800\ldots0$ é múltiplo de 1991. Podemos cortar os zeros à direita mantendo o número múltiplo de 1991, mas mantemos três deles:

$199\ldots98000$ é múltiplo de 1991. Somando 1991 obtemos outro múltiplo de 1991, $199\ldots98000 + 1991 = 199\ldots99991$. ∎

Exercícios

03. (OPM 2000) Dados 17 números inteiros positivos quaisquer, sempre é possível escolher cinco deles de modo que a soma dos cinco seja divisível por 5. Justifique este fato.

04. Durante seu treinamento um jogador de xadrez joga pelo menos uma vez por dia e não mais do que 12 vezes por semana. Prove que há um período de dias consecutivos no qual ele joga exatamente 20 vezes.

05. Escolhem-se 55 elementos do conjunto $1, 2, \ldots, 100$. Prove que dois destes elementos terão como diferença 9, outros dois, 10 e outro par, 12, mas que não haverá obrigatoriamente um par cuja diferença seja 11.

3. "Entre esses dois valores aparece o que quero": Continuidade

Considere a seguinte situação: você está de um lado de um rio e o pote de ouro do duende está do outro lado do rio. Para chegar até o pote, você necessariamente teria que atravessar o rio, certo? Expressando de outro modo: *existe* um ponto no rio por onde você vai passar.

Um outro exemplo: um termômetro de farmácia marca 35° e você vai medir sua temperatura: ela é de 37°. Em algum momento o termômetro vai marcar 36,2342545°, certo?

Mais um exemplo: se o Tabajara Futebol Clube começou 2008 com 49939 derrotas e começou 2009 com 50103 derrotas então em algum momento de 2008 eles estavam com exatamente 50000 derrotas.

Por que sabemos desses fatos? A resposta é simples: as variáveis que estudamos (distância; temperatura; número de derrotas) têm uma variação "suave", e para essas variáveis podemos aplicar argumentos de *continuidade*.

Cuidado, porém! Nem todas as variáveis funcionam assim (por exemplo, a quantidade de pontos de lançamentos consecutivos de um dado), e na verdade nos problemas devemos *provar* que isso ocorre.

Exemplo 3.1.

Prove que existem 100 números consecutivos entre os quais há exatamente 15 números primos.

Resolução

Entre 1 e 100 há 25 primos (verifique!) e entre os números $101! + 2$, $101! + 3$, $\ldots$, $101! + 101$, em que $101! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 101$, não há primos (o primeiro é múltiplo de 2; o segundo é múltiplo de 3; $\ldots$; o último é múltiplo de 101).

"Avançando" uma unidade, a quantidade de primos em intervalos de 100 números consecutivos vai aumentando ou diminuindo de no máximo 1 unidade a cada passo. Assim, como era 25 inicialmente, pode ser igual a 0 e aumenta ou diminui de 1 em 1, em algum momento é igual a 15. ∎

Exemplo 3.2.

Seja n um inteiro maior do que 1. São dados $2n$ pontos no plano de modo que entre eles não haja três colineares. Dos $2n$ pontos, n são coloridos de azul e os demais n são coloridos de vermelho. Uma reta do plano é dita *balanceada* quando passa por um ponto azul e um ponto vermelho e, em cada lado da reta, a quantidade de pontos azuis e vermelhos são iguais.

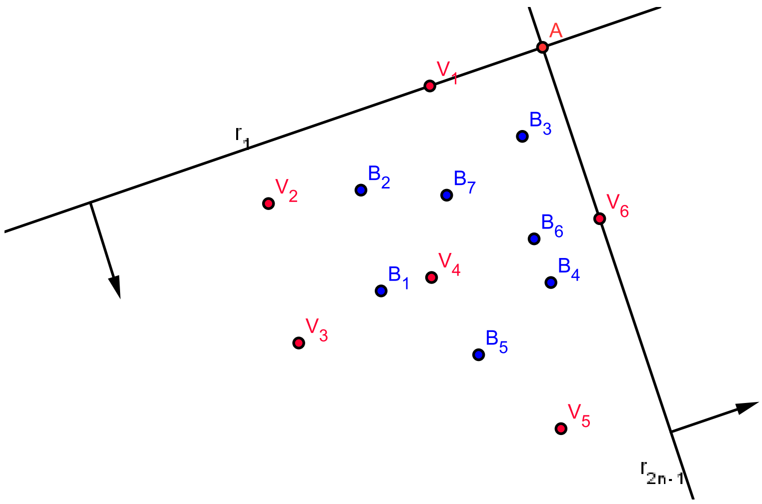
Prove que existem pelo menos duas retas balanceadas.

Resolução

Primeiro, consideramos o *fecho convexo* dos $2n$ pontos, que é o menor polígono que contém os $2n$ pontos. A melhor maneira de visualizar um fecho convexo é imaginar os $2n$ pontos como pregos e um elástico muito pequeno, mas que se estende infinitamente. Estenda o elástico até que ele contenha todos os $2n$ pontos e solte o elástico; a figura formada pelo elástico é o fecho convexo.

Se o fecho convexo contém pontos das duas cores, o problema acaba: de fato, considere um conjunto de vértices consecutivos do fecho convexo, todos azuis (pode até ser um ponto só). Então os vizinhos dos dois extremos são vermelhos, de modo que há pelo menos dois pares de vértices consecutivos de cores diferentes. Esses pares de vértices consecutivos determinam retas balanceadas: em um lado há 0 ponto de cada cor e do outro, $n-1$ pontos de cada cor.

Enctão ficamos somente com o caso em que há somente, digamos, pontos vermelhos no fecho convexo. Seja A um dos vértices e gire um reta em torno de A, no sentido anti-horário, obtendo $2n-1$ retas $r_1, r_2, \ldots, r_{2n-1}$ que passam por A e um dos outros $2n-1$ pontos. A cada reta, a diferença entre a quantidade de pontos azuis e vermelhos do lado "direito" da reta aumenta ou diminui em 1. Porém, inicialmente a diferença é 2 (já que a última reta passa por dois vermelhos, sobram dois azuis a mais) e no final a diferença é 0 (não há pontos à direita). Então, em algum momento é igual a 0 (nesse caso o último; mas será que existem mais?).



Considere a *primeira* reta AB_i cuja diferença é zero. Então a diferença da reta anterior é 1 (pois se fosse negativo, lembrando que inicialmente era 2 então teria chegado a zero antes), de modo que na reta tinha um ponto azul a mais: esse ponto é B_i. Logo B_i é azul, e o problema acabou, pois achamos uma reta para cada vértice do fecho convexo, que tem pelo menos três vértices. ∎

Exercícios

06. (OBM 2008) Vamos chamar de *garboso* o número que possui um múltiplo cujas quatro primeiras casas de sua representação decimal são 2008. Por exemplo, 7 é garboso pois 200858 é múltiplo de 7 e começa com 2008. Observe que $200858 = 28694 \times 7$.

(a) Mostre que 17 é garboso.

(b) Mostre que todos os inteiros positivos são garbosos.

07. (OBM 2008) Sobre uma reta há um conjunto S de $6n$ pontos. Destes, $4n$ são escolhidos ao acaso e pintados de azul; os $2n$ demais são pintados de verde. Prove que existe um segmento que contém exatamente $3n$ pontos de S, sendo $2n$ pintados de azul e n pintados de verde.

08. Seja A um conjunto de $2n$ pontos no plano, não havendo três colineares. Prove que para cada par de pontos $X, Y \in A$ existe uma reta que particiona A em dois conjuntos de n pontos, sendo que X e Y pertencem a conjuntos diferentes.

09. (OBM 1999) O planeta *Zork* é esférico e tem várias cidades. Dada qualquer cidade existe uma cidade antípoda (i.e., simétrica em relação ao centro do planeta).

Existem em Zork estradas ligando pares de cidades. Se existe uma estrada ligando as cidades P e Q então também existe uma estrada ligando as cidades P' e Q', onde P' é a antípoda de P e Q' é a antípoda de Q. Além disso, estradas não se cruzam e dadas duas cidades P e Q sempre é possível viajar de P a Q usando alguma sequência de estradas.

O preço da *Kriptonita* em *Urghs* (a moeda planetária) em duas cidades ligadas por uma estrada difere por no máximo 100 Urghs. Prove que existem duas cidades antípodas onde o preço da Kriptonita difere por no máximo 100 Urghs.

10. (Problema 3, IMO 1997) Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números reais que verificam as seguintes condições:

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| = 1$$

e

$$|x_i| \le \frac{n+1}{2} \text{ para } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Demonstre que existe uma reordenação (permutação) $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tal que

$$|y_1 + 2y_2 + \cdots + ny_n| \le \frac{n+1}{2}.$$

11. (Problema 6, IMO 1996) Sejam n, p, q inteiros positivos com $n > p + q$. Sejam $x_0, x_1, \ldots, x_n$ inteiros satisfazendo as seguintes condições:

(a) $x_0 = x_n = 0$;

(b) para cada inteiro i com $1 \le i \le n$,

$$x_i - x_{i-1} = p \text{ ou } x_i - x_{i-1} = -q.$$

Mostre que existe um par (i, j) de índices com $i < j$ e $(i, j) \ne (0, n)$ tal que $x_i = x_j$.

12. (Banco IMO 2007) Seja $A_0 = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ uma sequência de números reais. Para cada $k \ge 0$, a partir da sequência $A_k = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ construimos uma nova sequência A_{k+1} como se segue:

(1) Escolhemos uma partição $I \cup J = \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que a expressão

$$\left| \sum_{i \in I} x_i - \sum_{j \in J} x_j \right|$$

é mínima. Os conjuntos I e J podem ser vazios; nesse caso, a soma é zero. Em caso de haver mais de uma partição, escolhe-se uma ao acaso.

(2) Então $A_{k+1} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, em que $y_i = x_i + 1$ se $i \in I$ e $y_i = x_i - 1$ se $i \in J$.

Prove que, para algum inteiro positivo k a sequência A_k contém um elemento x tal que $|x| \ge \frac{n}{2}$.

4. "OK, consigo achar, mas vai dar um trabalhinho": Algoritmos

Muitas vezes não conseguimos exibir explicitamente algo mas conseguimos descrever como obtê-lo. Essas descrições, feitas de maneira precisa, são chamadas de *algoritmos*. Os algoritmos devem satisfazer duas condições:

(1) Funcionar (aposto que essa condição você conhecia!);

(2) Terminar.

O item (2) parece bobo, mas não é. Só para ilustrar: um motivo por que 1 não é primo é fazer com o algoritmo que fatora números em primos descrito por "dividir pelo menor primo positivo que é divisor até dar 1" termine.

Exemplo 4.1.

(OBM 2000) Isabel tem dois baralhos, cada um com 50 cartas. Em cada um dos baralhos estão escritos os números de 1 a 100 (em cada carta estão escritos dois números, um em cada face da carta). Por um defeito de fabricação, a distribuição dos números nas cartas não é a mesma nos dois baralhos (por exemplo, em um dos baralhos o 1 aparece na mesma carta do 2; no outro, o 1 aparece com o 76).

Mostre como Isabel deve fazer para que, ao colocar as 100 cartas sobre uma mesa, as faces voltadas para cima mostrem todos os números de 1 a 100.

Resolução

Podemos fazer isso tomando qualquer carta de qualquer baralho, colocando sobre a mesa e vendo seu verso. Depois disso procuramos a carta de mesmo número do verso (procurando no outro baralho, já que já foi usada no primeiro baralho). Fazemos com esta carta o mesmo que foi feito com a primeira carta. Continua-se a fazer isso até fechar um ciclo (um mesmo número que já saiu em um baralho sair no outro).

Quando um ciclo for fechado pega-se outra carta e começa um novo ciclo. Fazendo isso até o final das cartas as faces voltadas para cima mostrarão todos os números de 1 a 100.

Note que o processo termina, pois a quantidade de cartas que sobram após fechar cada ciclo diminui. ∎

Exemplo 4.2.

(OBM 1994) Considere todos os círculos cujas circunferências passam por três vértices consecutivos de um polígono convexo. Prove que um desses círculos contém todo o polígono.

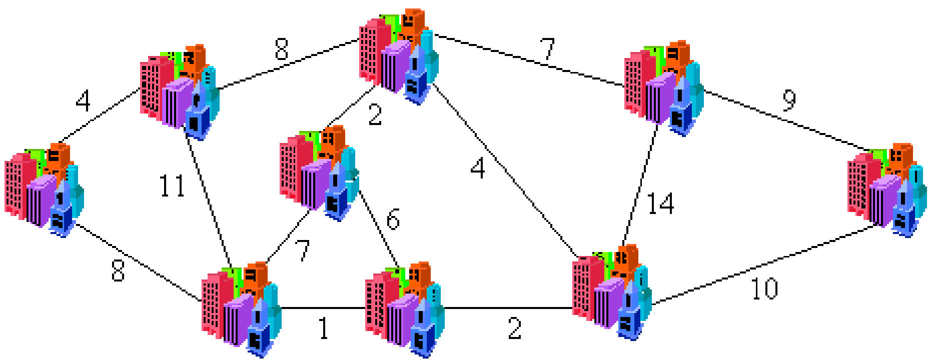
Resolução

Sejam A e B vértices consecutivos do polígono. Tome um círculo que contém todo o polígono e tenha AB como corda. Diminuindo o círculo, mas mantendo AB como corda fazemos com que sua borda passe por um outro vértice P. Se A, B e P são vértices consecutivos, acabou. Caso contrário, suponha que A e P não seja consecutivos. Aumentamos o círculo, mantendo AP como corda, até que sua borda passe por um vértice Q entre A e P (nesse caso, o círculo ainda contém o polígono; você consegue ver por quê?). Se A, Q e P são consecutivos, acabou. Se não, tome dois vértices não consecutivos e continue.

Note que a quantidade de vértices entre as extremidades dos arcos sempre diminui; então o procedimento vai acabar, e nesse momento teremos três vértices consecutivos. ∎

Exercícios

13. (OPM 1999) No reino da Kruskalândia, há estradas ligando as cidades, como mostra o mapa a seguir. Todas as estradas são de terra e por uma estrada pode-se transitar em ambos os sentidos. O comprimento de cada estrada, em quilômetros, está indicado, fora de escala, no mapa a seguir.



O rei da Kruskalândia resolveu pavimentar algumas estradas do reino de modo que, a partir de qualquer cidade, fosse possível atingir qualquer outra viajando somente por estradas pavimentadas. Como os cofres do reino andavam meio vazios, resolveu economizar o máximo possível. Chamou, então, o matemático da corte, que prontamente resolveu o problema. Agora é a sua vez.

(a) Qual é o menor número de estradas que o rei precisa pavimentar?

(b) Qual é o menor número de quilômetros de estrada que ele precisa pavimentar? Indique, na folha de respostas, uma possível escolha de estradas para isto.

14. (OBM 1996) Há n rapazes e n garotas. Cada rapaz ordena as garotas em ordem de preferência e cada garota ordena os rapazes em ordem de preferência. Prove que é possível casar os rapazes e garotas de modo que não haja dois casais tais que cada pessoa prefira alguém do outro casal a seu cônjuge.

15. (OBM 2003) Seja S um conjunto de n elementos. Determine o menor inteiro positivo k com a seguinte propriedade: dados quaisquer k subconjuntos distintos $A_1, A_2, \ldots, A_k$ de S, existe uma escolha adequada dos sinais $+$ e de modo que $S = A_1^{\pm} \cup A_2^{\pm} \cup \ldots \cup A_k^{\pm}$ onde $A_i^{+} = A_i$ e $A_i^{-} = S - A_i$ é o complementar de A_i em relação a S.

16. (Vingança Olímpica 2007) Seja $A_1A_2B_1B_2$ um quadrilátero convexo. Nos vértices A_1 e A_2, adjacentes, há duas cidades argentinas. Nos vértices B_1 e B_2, também adjacentes, há duas cidades brasileiras. No interior do quadrilátero, existem a cidades argentinas e b cidades brasileiras, sem haver três cidades colineares. Determine se é possível, independentemente da posição das cidades, construir estradas retas, cada uma das quais conecta duas cidades argentinas ou duas cidades brasileiras, de modo que:

- Não existam duas estradas que se intersectem em um ponto que não seja uma cidade;
- De qualquer cidade argentina, seja possível chegar a qualquer outra cidade argentina; e
- De qualquer cidade brasileira, seja possível chegar a qualquer outra cidade brasileira.

Se for sempre possível, monte um algoritmo que construa uma possível configuração.

17. (Problema 6, IMO 1982) Seja S um quadrado de lado 100 e L um caminho sobre S que não corta a si mesmo e que é formado pelos segmentos A_0A_1, A_1A_2, $\ldots$, $A_{n-1}A_n$, com $A_0 \neq A_n$. Suponha que para cada ponto P pertencente a um dos lados de S exista um ponto de L cuja distância a P não ultrapassa $1/2$. Prove que existem dois pontos X e Y de L tais que $XY \leq 1$ e o comprimento do caminho entre X e Y em L é maior ou igual a 198.

18. (Problema 3, IMO 2007) Numa competição de matemática alguns participantes são amigos. A amizade é sempre recíproca. Dizemos que um grupo de participantes é um *clique* se dois quaisquer deles são amigos (em particular, qualquer grupo com menos de dois participantes é um clique). O *tamanho* de um clique é o número de seus elementos. Sabe-se que nesta competição o tamanho máximo dos cliques é par.

Prove que os participantes podem ser distribuídos em duas salas, de modo que o tamanho máximo dos cliques contidos numa sala é igual ao tamanho máximo dos cliques contidos na outra sala.

19. (Rússia 2008) Em um torneio de xadrez há $2n + 3$ participantes. Cada par de participantes joga exatamente uma partida entre si. Os jogos são arranjados de modo que não haja dois jogos simultâneos e cada participante, após jogar uma partida, fica livre durante as próximas n partidas. Prove que um dos participantes que jogou na primeira partida também vai jogar a última partida.

20. (Rússia 2005) 100 pessoas de 50 países, duas de cada país, estão sentadas em círculo ao redor de uma mesa. Prove que é possível dividir as 100 pessoas em dois grupos com 50 pessoas, de modo que não haja pessoas de mesmo país nem três pessoas consecutivas do círculo no mesmo grupo.

21. (Rússia 2005) 100 pessoas de 25 países, quatro de cada país, estão sentadas em círculo ao redor de uma mesa. Prove que é possível dividir as 100 pessoas em quatro grupos de modo que não haja pessoas de mesmo país nem duas pessoas vizinhas do círculo no mesmo grupo.