

## Orientações para alunos que pretendem ir para a IMO

Falaremos inicialmente de algumas coisas de interesse geral:

### AS QUESTÕES DA PROVA

A principal dificuldade das questões da IMO NÃO É o conhecimento de alguma TEORIA específica escondida em alfarrábios aos quais só russos e chineses têm acesso. É a IMPLEMENTAÇÃO de uma ideia que envolve (vários) fatos que todos vocês conhecem. Mesmo quando alguma teoria mais específica ajuda, existe uma solução envolvendo a concatenação de vários fatos bem conhecidos e que costuma ser a solução apresentada por vários alunos durante a prova. Tomemos como exemplo o problema 6 da IMO 2001. Só depois da prova apareceram as soluções com inteiros de Eisenstein. Durante a prova o pessoal fez fatorando (em  $Z$ ) e tendo fé! Há poucos motivos para estudar coisas esotéricas.

Reiterando: o mais importante é, portanto, o DOMÍNIO das técnicas e resultados mais básicos de cada área. Entenda “ter domínio de uma técnica” como “saber o que fazer quando olhar um problema que usa a técnica, e resolvê-lo sem dificuldades”. Por exemplo, você domina a fórmula da equação quadrática quando sabe resolver qualquer equação quadrática; mais um exemplo: você domina resíduos quadráticos quando sabe dizer quando  $a$  é resíduo quadrático de  $b$  para todos  $a, b$  inteiros (isto é, você não “trava” nem precisa parar para lembrar como se faz essa verificação).

Mas afinal de contas, quais são estas técnicas e resultados básicos que preciso saber? A seguir temos uma lista detalhada de tais assuntos e é bom ressaltar que esta lista muda todo ano. Isso ocorre porque a IMO não é algo estático; a prova e os assuntos que aparecem nela progridem a cada ano. Cabe a nós, tanto professores como estudantes, acompanhar/ultrapassar esse progresso. Ou seja, a ideia genial de um ano passa a ser manjada no ano seguinte. Portanto é muito importante conhecer o “estilo IMO”, e para isto é imprescindível que vocês saibam resolver TODAS as questões das, digamos, últimas 10 IMOs, que podem facilmente ser encontradas na internet, por exemplo, nos sites da OBM (<http://www.obm.org.br>) ou no Mathlinks (<http://www.mathlinks.ro>). Saber resolver as questões NÃO significa decorar as suas soluções, mas sim compreendê-las e saber modificá-las de acordo. Enquanto a solução parecer “mágica” isto quer dizer que você ainda não compreendeu a solução de verdade. Isto só ocorre quando você puder dizer para si mesmo: “ah, mas é só isso?”

Para exemplificar, observem as seguintes “variações” em torno do mesmo tema. Coincidência incrível, não?

Questão 6 de 1988  $\equiv$  Questão 5 de 2007

Questão 6 de 1998  $\equiv$  Questão 4 de 1990

Questão 4 de 1999  $\equiv$  Questão 3 de 1990

Sem mais delongas, os principais assuntos de cada área são:

(i) Teoria dos Números: teorema de Euler-Fermat (incluindo menor expoente e Lema de Hensel), teorema Chinês dos Restos, Raízes Primitivas, Equação de Pell (generalizada ou não), Resíduos Quadráticos e Reciprocidade Quadrática, Noções de Aproximações Diofantinas. Obtenção de novos fatores primos a partir de mdcs pequenos; “se você fatorar, tire o mdc dos fatores”.

(ii) Geometria: arrastão de ângulos; lei dos senos (e uma boa intimidade com Trigonometria); teorema de Ptolomeu, Ceva e Menelaus, reta de Euler; circunferência dos nove pontos; eixo radical; circunferência de Apolônio. Inversão. Geometria Projetiva Instrumental. Noções de Transformações Geométricas: rotações, roto-homotetias e suas “semelhanças automáticas”; homotetia e composição de homotetias. Desigualdade de Erdős-Mordell; teorema isoperimétrico. Geometria Analítica: uso como estratégia vencedora (com o auxílio da trigonometria e números complexos). Números Complexos. Vetores. Coordenadas Trilineares. Conjugados isogonais. Simedianas.

(iii) Álgebra:

(iii-1) Polinômios: Paralelo com Números Inteiros (divisibilidade, divisão euclidiana, fatoração única, congruências, teorema chinês dos restos); polinômio interpolador de Lagrange; tabelas de diferença; irredutibilidade (teorema da raiz racional, lema de Gauss, critério de Eisenstein); fatoração única de polinômios com coeficientes em  $Z/pZ$ ; polinômio minimal de um número algébrico; raízes da unidade como marcadores; análise.

(iii-2) Desigualdades: médias, Cauchy-Schwarz, médias potenciais; rearranjo; Chebyshev; Jensen; uso de pesos nas desigualdades citadas; considerações relativas à convexidade ou falta dela (quando aproximar e afastar os pontos); utilização de indução; substituições ( $x = a - b + c$ , trigonométricas, etc); interpretações geométricas; desigualdades trigonométricas; *bunching* e Schur.

(iii-3) Corpos Finitos: polinômios módulo primo; polinômio irredutível – alguns fatos e cálculos (sonho de todo estudante:  $(a + b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}$ ); utilização na solução de recorrências lineares módulo um primo.

(iii-4) Funções: pontos fixos; utilização de desigualdades para concluir fatos sobre crescimento e completeza (e.g.,  $f(x^2) = (f(x))^2$  implica  $f(\mathbb{R}_+) \geq 0$  no IMO-Moscú 2); se  $f(f(x)) = g(x)$  e  $g$  é injetora, então  $f$  é injetora; se  $f(g(x)) = h(x)$  e  $h$  é sobrejetora, então  $f$  é sobrejetora; se  $g$  é sobrejetora e encontramos  $f(g(x))$  em função de  $g(x)$  então o problema acabou (cf. problema 6, IMO 1999); equação de Cauchy (em geral, o caminho  $Z \rightarrow Q \rightarrow R$ ); no caso de funções com

domínio  $Z$  ou  $Q$ , verificar se  $f$  é multiplicativa; simplificar notação (fazer  $f(\text{constante}) = a$ ); utilização de simetria (e falta dela) para obter relações.

(iii-5) Análise: teorema do valor intermediário (Bolzano); argumentos do tipo “para  $n$  suficientemente grande”.

(iii-6) Indução: indução completa; princípio da boa ordenação; indução em subconjuntos convenientes (multiplicativa, potências de 2); tomando a base de indução suficientemente grande; generalizando; fortalecendo a hipótese de indução.

(iv) Combinatória:

(iv-0) Estude casos pequenos: busca de padrões, obtenção de estruturas em contagens mais difíceis; estude casos grandes: comportamento assintótico de contagens.

(iv-1) Contagem e Contagem Dupla: bijeções; “tudo menos o que não interessa”; probabilidades; injeções, sobrejeções; obtenção de igualdades e desigualdades com contagem dupla, bijeções e injeções; recursões e estimativas utilizando recursões.

(iv-2) Princípio da Casa dos Pombos: formulação contínua, teorema de Kronecker, teorema de Ramsey.

(iv-3) Teoria dos Grafos: indução (sempre reduzindo o caso  $n$  para os anteriores, e não o contrário); árvores; algoritmos em geral (problema 3 da IMO 2007); algoritmo de Kruskal; busca em profundidade; busca em largura; algoritmos de ordenação de conjuntos; caminhos e circuitos eulerianos; coloração de vértices em grafos, incluindo teorema das cinco cores; teorema de Turán; grafos planos ( $V - A + F = 2$ , teorema de Kuratowski); grafos bipartidos (caracterização: sem ciclos ímpares). Teorema dos casamentos, Max-Flow, Min-Cut.

(iv-4) Funções Geratrizes: fórmula de multiseção (números complexos como marcadores); utilização de várias variáveis; coeficientes em  $Z/pZ$  (recorrências lineares módulo  $p$ ); analogia com pinturas em tabuleiros.

(iv-5) Geometria Combinatória: conceitos: diâmetro de um conjunto, conjunto convexo, fecho convexo; técnicas: casos extremos (problema de Sylvester), princípio da casa dos pombos (problemas envolvendo pinturas do plano, coberturas); contagem (número de distâncias repetidas); determinação de possíveis posições de um ponto indeterminado; escolha de uma direção adequada.

(iv-6) Invariantes: determinação e construção de invariantes (paridade, restos, pinturas, funções); semi-invariantes (determinação e construção). “Invariante automático” em recursões lineares homogêneas cujo polinômio característico é divisível por  $x - 1$ .

(iv-7) Indução: como fazer a partir de casos pequenos; obtenção de algoritmos a partir da indução.

Talvez você não saiba ou mesmo não conheça alguns destes tópicos, nesse caso converse com um professor de confiança (IMO certified). Estes professores estão aptos a indicar os pontos mais relevantes de cada assunto para a prova da IMO. Complementarmente, também temos uma (ainda incipiente) wiki em <http://erdos.ime.usp.br> (numa máquina gentilmente cedida pelo professor Yoshiharu Kohayakawa), e que esperamos possa se tornar uma referência útil e de fácil acesso num futuro próximo; para isto contamos com sua colaboração!

**SER RÁPIDO É IMPORTANTE!**

Já estamos convictos de que todos os nossos representantes brasileiros na IMO conseguiriam 42 pontos se o tempo de prova fosse infinito; o próximo passo lógico é, então, ser mais rápido. Como fazer isso? Pense nos seguintes passos:

- (1) **Comece estudando bem a teoria, tendo o domínio dos assuntos.** Tenha a coragem de estudar especialmente aquelas partes em que você não se dá muito bem, porque aí você não vai precisar depender da sorte para ir bem em uma prova.
- (2) **Exponha-se à maior quantidade de ideias possível.** Resolva o mesmo problema com várias técnicas, até ser um “especialista” no problema.
- (3) **Tome cuidado para não ficar “bitolado” em alguma técnica.** Não adianta dizer que “resolve todos os problemas de geometria com complexos” se você demora duas horas para resolver um problema que poderia sair em 10 minutos com uma transformação geométrica. Sempre tem um problema que não pode ser resolvido (pelo menos, em um tempo razoavelmente finito) com a sua “técnica favorita”. Dito isso,
- (4) **Veja como obter soluções mais curtas.** Depois de resolver um problema pela primeira vez, pense em como você poderia tornar sua solução mais curta; se você seguiu o item anterior, pense nas vantagens e desvantagens de cada técnica. Procure a “essência” do problema. Depois de resolver um problema, pondere sobre quais ideias foram mais importantes e faça um resumo (escrito) dessas ideias (uma espécie de outline da solução, cujos detalhes são fáceis para você completar).
- (5) **Aprenda a usar e elaborar “macros” de ideias.** Isto é, tente descobrir algum padrão de concatenação de ideias (os bons e velhos “lemas”) que seja frequente em certos problemas. Um bom exemplo é o lema de Hensel, que engloba uma indução com contas razoavelmente grandes que envolvem binômio de Newton em um só lema. Em outras palavras, estruture na sua cabeça as principais ideias e fique atento aos momentos em que você pode usá-las.

Com relação aos dois últimos itens, você pode (e deve!) treinar com os problemas das últimas IMOs; ao estudá-los, escreva pequenos roteiros com as ideias principais das soluções. Isto os ajudará na assimilação e estruturação da teoria e ideias envolvidas.

#### VOCÊ PODE SER OURO NA IMO!

Nos últimos dez anos, o Brasil tem sistematicamente obtido bons resultados na IMO. Hoje em dia, é mais difícil fazer parte da equipe do Brasil do que ganhar medalhas na IMO. De fato, muitos alunos com condições de ganhar medalha na IMO não fazem parte da equipe brasileira (o que, para nós, que fazemos a seleção, é de cortar o coração ☹).

Temos vários motivos para acreditar que o Brasil está pronto para ser um país de primeira linha na IMO. Isso quer dizer que OS BRASILEIROS QUE VÃO PARA A IMO TÊM CONDIÇÕES DE GANHAR OURO. O principal argumento que temos a favor dessa crença é o fato de que, se você aprender direitinho todas as técnicas (o que normalmente ocorre com os IMO-escolhidos), os problemas 1, 2, 4 e 5 (e muitos problemas 3 e 6) não vão lhe oferecer dificuldade.

Os incrédulos podem questionar, “então por que isso já não ocorre?”

É porque nós ainda temos medo de vencer. Entramos na prova “pisando em ovos”, isto é, nós tomamos cuidado demais com tudo; somos cautelosos demais com problemas que são fáceis nas CNTP, demorando 2 horas em problemas que normalmente são resolvidos em 15 minutos; e, principalmente, temos medo de arriscar em problemas um pouco mais difíceis. Em outras palavras, respeitamos demais a prova.

Como mudar isso? A resposta não é tão óbvia, mas acreditamos que o primeiro passo é começar a ver a possibilidade de ganhar ouro na IMO não mais como um sonho distante, mas como uma realidade que pode ser alcançada com um bom trabalho. Ninguém precisa ser gênio para ganhar ouro na IMO. É só manter um trabalho consistente desde o início de sua preparação e dar o seu máximo na hora da prova.

#### ALGUMAS ORIENTAÇÕES PARA O MOMENTO DA PROVA

(JÁ? SIM, PARA REPETIRMOS VÁRIAS VEZES ATÉ VOCÊ SABER DE COR)

Para obter um bom resultado, é necessário, além do treinamento técnico, uma estratégia eficiente na hora da prova. Assim, cabem aqui algumas observações:

- (i) **Não é possível dizer quais são os problemas fáceis/difíceis da prova até tentar resolver seriamente cada problema.** Isto quer dizer que o problema 2 pode ser mais fácil do que o problema 1; ou que exatamente o problema da área que você mais gosta é justo o mais difícil (caindo no erro de querer “resolver por orgulho”); o problema é mais fácil do que parece (“ele é feio, mas não morde”); um dia da prova é bem mais fácil do que o outro (é bom lembrar que cada dia é independente dos demais); entre muitas outras possibilidades. E note também que o conceito de “dificuldade” varia de pessoa para pessoa.
- (ii) **“Hoje é um dia especial.”** Uma tendência que os alunos têm é de se comportarem de modo completamente diferente do que estão habituados nas provas da IMO. Isto é, provavelmente, um reflexo da mídia: nos filmes, o herói sempre tem aquele “momento especial” que faz com que ele vença enfrentando a situação de uma maneira inusitada que ele aprende/compreende naquele instante (citando Obi Wan Kenobi em Guerra nas Estrelas: “Luke, não siga a sua visão (sic?!), acredite na Força”). NA VIDA REAL, NÃO É ASSIM! A prova da IMO é UMA PROVA COMO QUALQUER OUTRA, e deve ser tratada como tal: não se deve pensar que o dia da prova é um dia especial em que se deve ser mais inteligente do que nunca. Lembre/Saiba/Acredite: UM BOM RESULTADO NÃO DEPENDE DE UM DESEMPENHO ACIMA DA MÉDIA. Não acredite no “popular dictate”

To be clever than ever

Or to fail forever!

Como você deve se comportar no dia, então? Ora, simples! COMO SEMPRE. Mantenha o seu trabalho: você teve uma performance consistentemente boa durante todo o seu treinamento e chegou à IMO; nada é mais lógico do que não mexer em time que está ganhando, certo?

- (iii) **“Estou nervoso, isso vai me atrapalhar.”** Não necessariamente. Ansiedade é normal numa competição como a IMO (e é sinal de que você se importa). Então ficar ansioso não é necessariamente ruim. Às vezes é bom para manter você “ligado no jogo”. O que não é bom é isso atrapalhar sua concentração. Se você sentir que está perdendo sua concentração, pare um pouco e tente restaurá-la. Cada um tem seu próprio jeito de fazer isso (comer chocolates, beber água, ir ao banheiro, pular no banheiro), então não existe uma “receita universal”. O mais importante é não perder o autocontrole.

Mais uma vez, para você não se esquecer:

**NÃO SE DEVE PERDER A CONCENTRAÇÃO.**

Abraços e bons estudos,  
Professores Carlos Shine, Edmilson Motta e Eduardo Tengan