Corte, deslize, compare e conclua

Alguns problemas de Geometria podem ser resolvidos com... tesoura, cola e xerox! Numa prova, talvez estes não sejam os instrumentos mais adequados; então vamos recortar, colar, ampliar e reduzir no papel mesmo e tentar enxergar o que acontece sem realmente fazermos essas operações.

Não poderíamos deixar de lado o teorema mais famoso da Matemática.

1. Duas demonstrações do teorema de Pitágoras

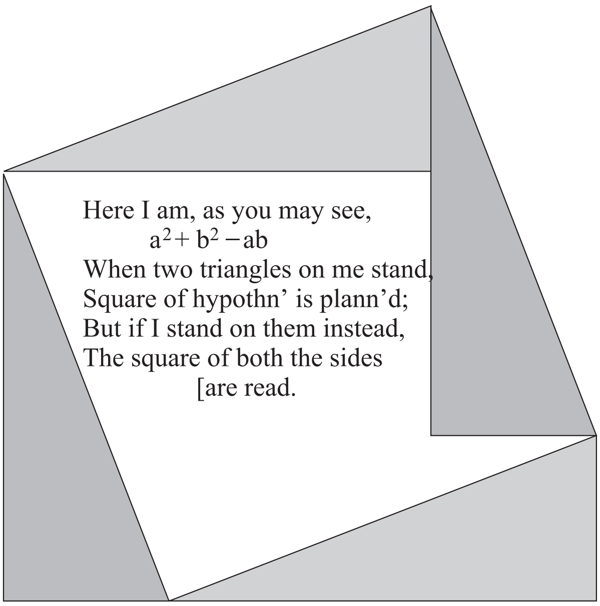
Todos conhecem o teorema de Pitágoras.

Teorema 1.1. *(Teorema de Pitágoras) Num triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.*

Vamos demonstrar o teorema de duas maneiras: uma na forma de um poema em inglês e outra recortando e colando... uma rosquinha!

Primeira demonstração.

A demonstração e o poema a seguir é de George Biddle Airy, que foi astrônomo real britânico de 1836 a 1881.



Tradução:

Aqui, estou, como você pode ver,

$$a^2 + b^2 - ab$$

Quando dois quadrados em mim se apóiam,

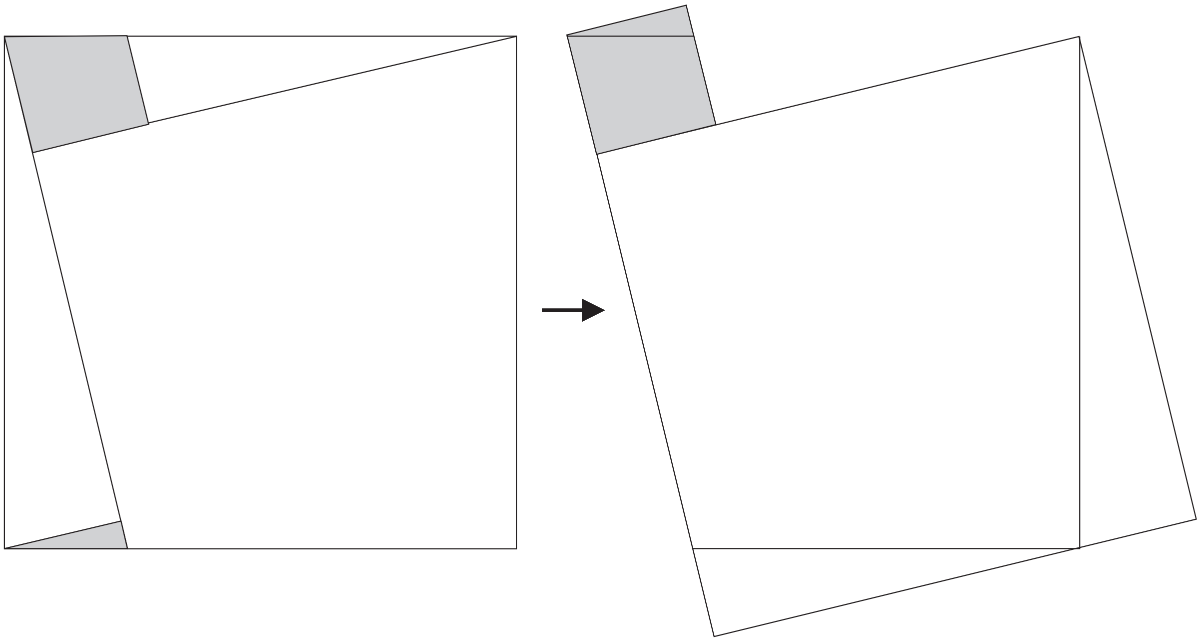
O quadrado da hipotenusa é evidente;

Mas se sou eu quem neles se apóia

Os quadrados de ambos os lados são lidos.

Segunda demonstração.

A figura a seguir mostra como recortar dois quadrados de um quadrado só.

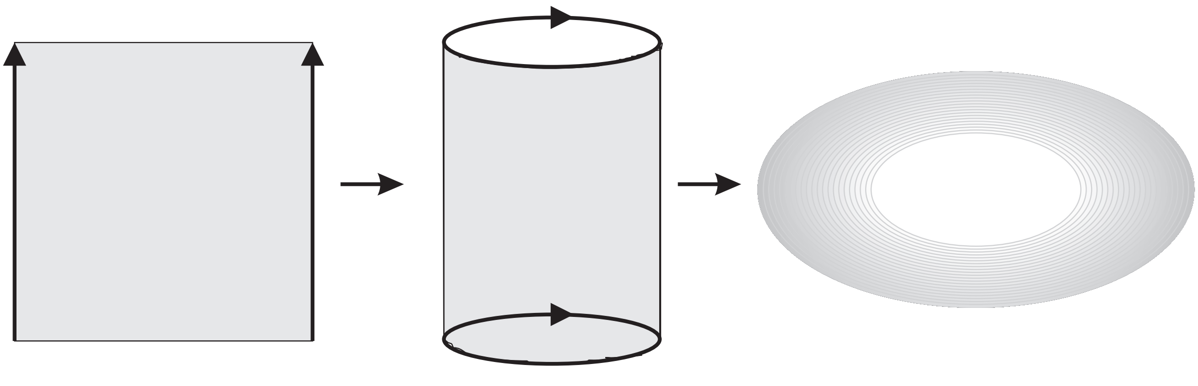


O triângulo retângulo em questão é o que tem como hipotesuna o lado esquerdo do quadrado.

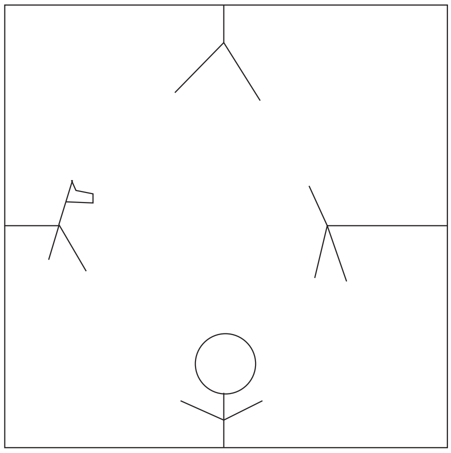
Vamos demonstrar que os polígonos que temos realmente são dois quadrados. Primeiro, note que os dois triângulos retângulos com hipotenusas iguais ao lado esquerdo e ao lado superior do quadrado são congruentes. Então, considerando os catetos correspondentes, os dois polígonos mostrados na figura da direta são quadrados com lados iguais aos catetos do triângulo retângulo.

Mas o que é mais interessante foi o que motivou essa demonstração. Um problema muito interessante é tentar cortar um quadrado em vários quadrados menores, todos de tamanhos diferentes (se os lados pudessem ser iguais, teríamos um problema nada interessante!). Só que podemos estender o problema: por exemplo, como cobrir a superfície de um cubo com quadrados de lados diferentes? E a de uma "rosquinha"?

Primeiro, temos que entender como construir um *toro* (a "rosquinha") a partir de um quadrado (feito de material elástico). Primeiro, colamos os lados opostos do quadrado, obtendo um cilindro. Depois, colamos as bordas de um cilindro, obtendo o toro.



Agora, suponha que exista um planeta muito, muito distante com a forma de um toro (como seria viver numa rosquinha? Um dia tenho que perguntar isso às formigas!). Esse planeta, assim como o planeta Terra, pode ter um mapa. Como seria esse mapa? A própria maneira como construímos o toro nos responde: seria um quadrado! Os dois lados horizontais representam os mesmos lugares, assim como os dois lados verticais. Note a diferença com os mapas da Terra: o mapa "dá a volta" pela horizontal, mas não pela vertical (a não ser que você acredite que o Pólo Norte e o Pólo Sul sejam o mesmo lugar!).



Calma! A pessoa e o cachorro estão inteiros!

Suponha que nesse planeta existam dois países, a *Quadradãolândia* e a *República Quadradinhense*. Ambos os países orgulham-se de sua forma quadrada. Olhe a primeira figura dessa demonstração: esse é o mapa desse planeta! A República Quadradinhense está em cinza e a *Quadradãolândia*, em branco. Com isso, conseguimos cobrir o toro com dois quadrados de lados diferentes. Incrível, não?

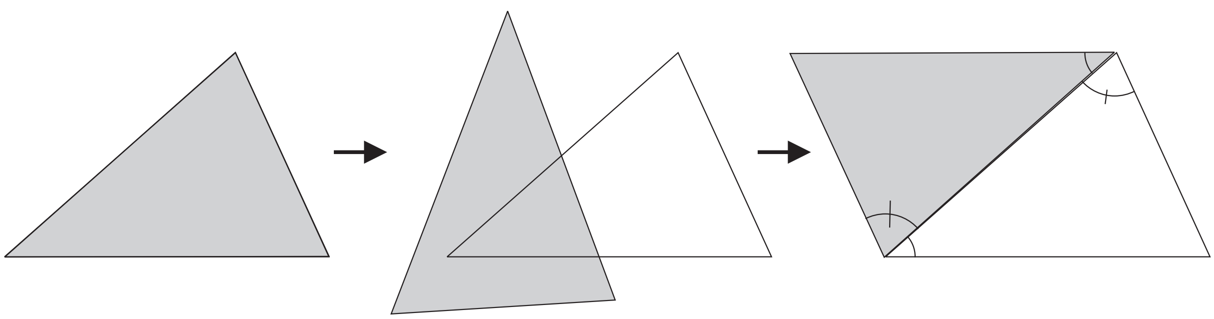
2. Paralelogramos e triângulos retângulos

Paralelogramos são quadriláteros cujos lados opostos são paralelos. Um teorema bastante importante é

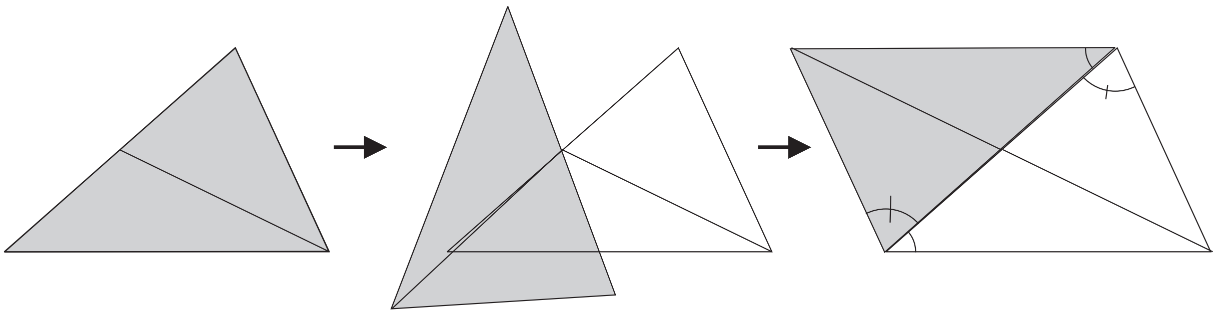
Teorema 2.1. *As diagonais de um paralelogramo cortam-se em seus respectivos pontos médios.*

Demonstração

Uma maneira de obter um paralelogramo a partir de um triângulo é duplicá-lo e girá-lo 180° em torno do ponto médio de um de seus lados. Os ângulos marcados asseguram o paralelismo dos lados opostos.



E se, antes de girarmos o triângulo, ligarmos o ponto médio ao vértice? Esse segmento, cujo nome é *mediana*, também gira 180° em torno do ponto médio:



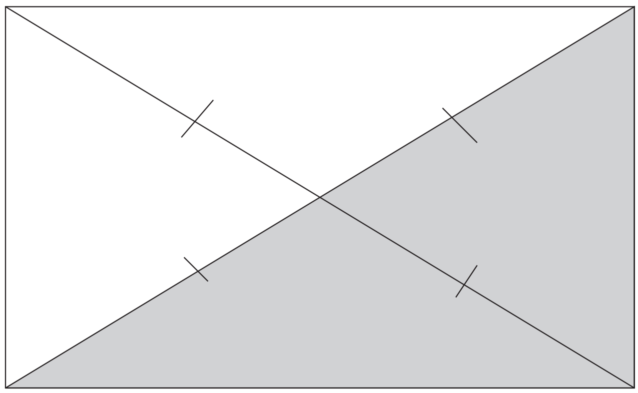
Mas ao girarmos um segmento 180° em torno de uma de suas extremidades e unirmos ao segmento antes de girado, obtemos um segmento com o dobro do tamanho. Logo o ponto médio do lado também é ponto médio do segmento. ∎

Uma aplicação desse importante fato é outro importante teorema:

Teorema 2.2. *As três distâncias do ponto médio da hipotenusa de um triângulo retângulo a seus vértices são iguais.*

Demonstração

Um triângulo retângulo pode ser entendido como a "metade" de um retângulo. Assim, é só lembrar que um retângulo é um paralelogramo com diagonais congruentes e observar a figura.



3. O baricentro

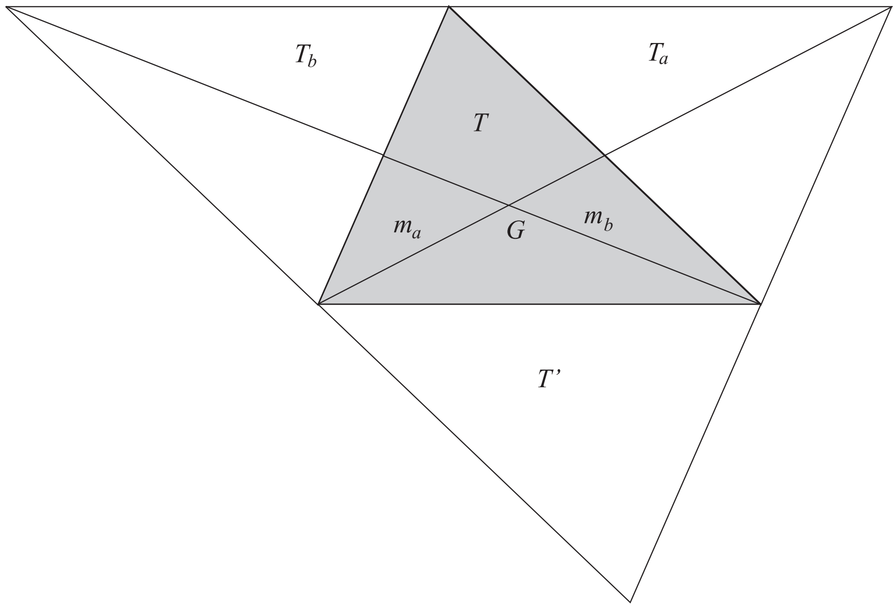
O baricentro é um dos *pontos notáveis* do triângulo. É o encontro das medianas de um triângulo.

Como temos três medianas, não é óbvio que elas passam por um mesmo ponto. Isso deve ser demonstrado.

Teorema 3.1. *As três medianas de um triângulo passam por um mesmo ponto, chamado baricentro do triângulo. Além disso, o baricentro divide cada mediana na razão* $2:1$.

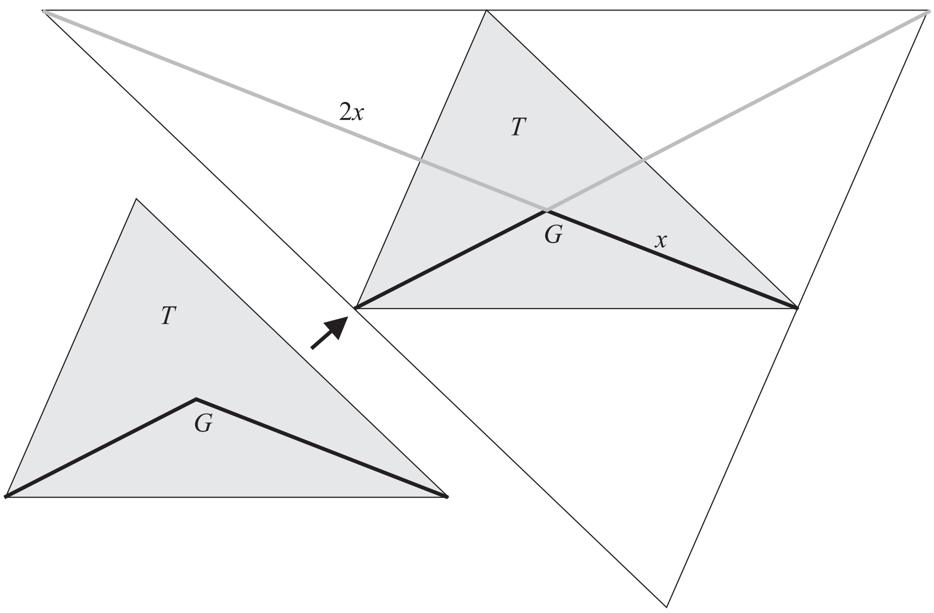
Demonstração

Demonstraremos que o encontro G de *duas* medianas divide ambas na razão $2:1$. Considere um triângulo T e desenhe duas medianas m_a e m_b. Em seguida, faça três cópias de T: em uma, T_a, copie também m_a, mas somente m_a; em outra, T_b, copie m_b, mas somente m_b; e na outra, T', não copie mais nada. Com T e suas três cópias, monte um triângulo M maior, como mostra a figura.



Observe que o quadrilátero formado por T e T_a é um paralelogramo. Logo uma das diagonais contém m_a. O mesmo vale para o paralelogramo formado por T e T_b e m_b. Portanto essas diagonais dos paralelogramos são medianas do triângulo maior M. Ou seja, as medianas de M contêm as medianas de T. Note que o triângulo maior é uma cópia ampliada de T; isso é verdade porque todas as suas dimensões são o dobro das dimensões correspondentes de T. Em outras palavras, M e T são semelhantes, com razão de semelhança igual a 2.

Agora, desenhe T mas, em vez de m_a e m_b, desenhe esses segmentos desde os vértices do triângulo até o ponto de interseção. Faça uma cópia M de T duas vezes maior. Encaixe esses dois triângulos como na figura anterior, obtendo



Note que o pedaço da mediana de T e o pedaço correspondente na cópia ampliada, duas vezes maior, unidas por G, formam a mediana do triângulo M. Logo, em todo triângulo M, a interseção entre duas medianas as cortam na razão $2:1$.

A partir desse fato, se considerarmos a interseção G' de uma dessas duas medianas com a terceira mediana, ela dividirá também ambas na razão $2:1$. Em particular, essa interseção divide a primeira mediana na razão $2:1$, então $G' = G$ e o teorema segue. ∎

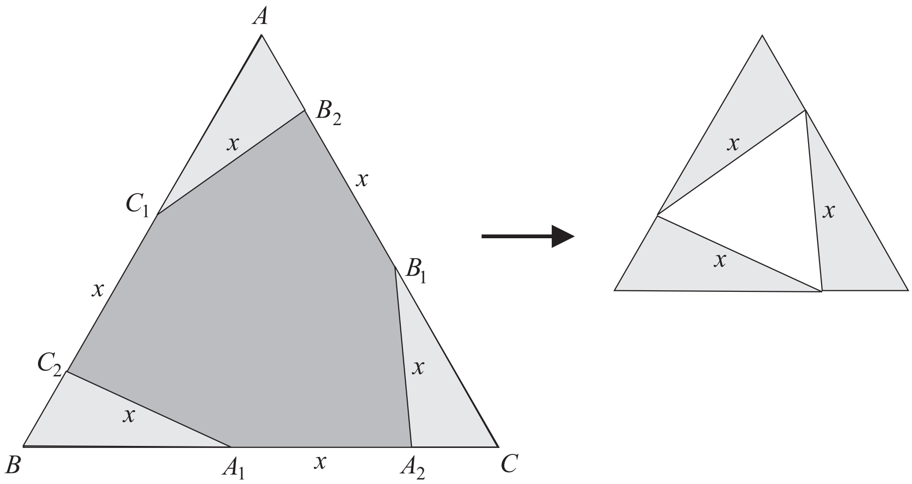
4. Um problema da IMO 2005

Todos os teoremas que demonstramos são conhecidos. Mas alguns problemas de Olimpíada podem ser resolvidos com as idéias que vimos. Em particular, o seguinte problema:

Problema 1, IMO 2005. *Escolhemos seis pontos sobre os lados do triângulo equilátero ABC: A_1, A_2 sobre BC; B_1, B_2 sobre AC; C_1, C_2 sobre AB. Essa escolha é feita de modo que $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ é um hexágono convexo com todos os seus lados iguais. Prove que A_1B_2, B_1C_2 e C_1A_2 são concorrentes.*

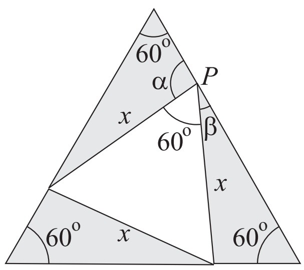
Resolução

Ao desenhar o hexágono, podemos pensar em recortá-lo! Se tirarmos o hexágono e rearranjarmos a figura, obtemos



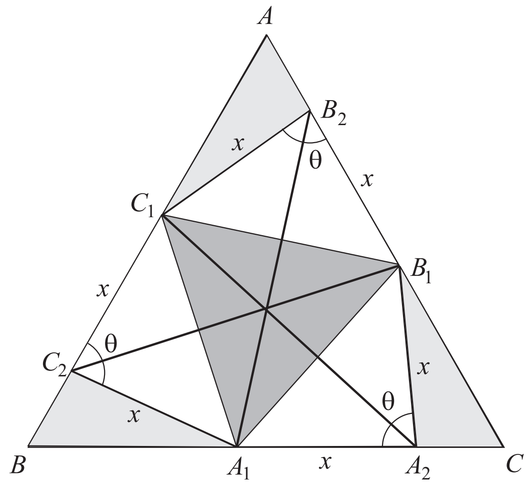
Ou seja, obtemos um triângulo equilátero dentro do outro. Mas será que as peças se encaixam direitinho mesmo? Sim! É só deslizar cada um dos triângulos C_2A_1B e A_2B_1C ao longo de AB e AC, respectivamente. Cada lado "diminui" de x, então encaixam-se perfeitamente num triângulo equilátero.

Vamos calcular alguns ângulos. Considere o vértice P na figura abaixo e sejam α, e β as medidas dos ângulos em torno desse vértice. Temos $\alpha + 60° + \beta = 180°$.



Observando os dois triângulos cinzas com P como um de seus vértices, nota-se que no triângulo superior estão marcados os ângulos internos de medidas α e $60°$, ou seja, o outro ângulo mede β; no triângulo da direita estão marcados os ângulos internos de medidas β e $60°$, sendo que o outro ângulo mede α. Isso quer dizer que os triângulos cinzas são todos congruentes!

Voltemos agora à figura original e recorte três triângulos do hexágono, ou melhor, trace três de suas diagonais. Pela congruência entre os triângulos AB_2C_1, BC_2A_1 e CA_2B_1, os ângulos externos $\angle C_1B_2B_1$, $\angle B_1A_2A_1$ e $\angle A_1C_2C_1$ são congruentes. Portanto, pelo caso LAL, os triângulos $C_1B_2B_1$, $B_1A_2A_1$ e $A_1C_2C_1$ são congruentes e, portanto, $B_1C_1 = A_1B_1 = C_1A_1$, ou seja, o triângulo $A_1B_1C_1$ é equilátero!



Para terminar, note que como $A_1B_1 = A_1C_1$ e $B_2B_1 = B_2C_1$, a reta A_1B_2 é mediatriz de B_1C_1. Analogamente, A_2C_1 é mediatriz de A_1B_1 e C_2B_1 é mediatriz de A_1C_1. Como as mediatrizes de um triângulo são concorrentes, o resultado segue. ∎

Exercícios

01. No hexágono $ABCDEF$, lados opostos são congruentes e paralelos. Prove que os triângulos ACE e BDF têm a mesma área.

02. Prove que se a e b são dois lados de um triângulo, então a sua área não excede $ab/2$.

03. Seja Q um quadrilátero cujoa lados medem a, b, c, d, nessa ordem. Prove que a área de Q não excede $(ac + bd)/2$.

04. Seja ABC um triângulo e M, N e P os pontos médios de BC, CA e AB, respectivamente. Prove que o triângulo cujos lados têm medidas iguais às das medianas AM, BN e CP tem área igual a $3/4$ da área de ABC.

05. Na última seção, utilizamos um fato que não demonstramos por ser bem conhecido: *as mediatrizes dos lados de um triângulo cortam-se num mesmo ponto*. Vamos prová-lo neste exercício. A *mediatriz* de um segmento é a reta perpendicular a ele que passa pelo seu ponto médio.

(a) Prove que todo ponto P da mediatriz de um segmento AB está à mesma distância até A e B, ou seja, que $PA = PB$. *Dica: desenhe o segmento AB num papel e dobre-o de modo que A coincida com B; desdobre e escolha um ponto P sobre a dobra e trace PA e PB; dobre de volta. O que acontece?*

(b) Prove que as três mediatrizes de um triângulo se encontram em um mesmo ponto. Esse ponto é chamado *circuncentro. Dica: é menos difícil do que parece! Considere o encontro O entre duas mediatrizes do triângulo ABC; qual a relação entre OA, OB e OC?*

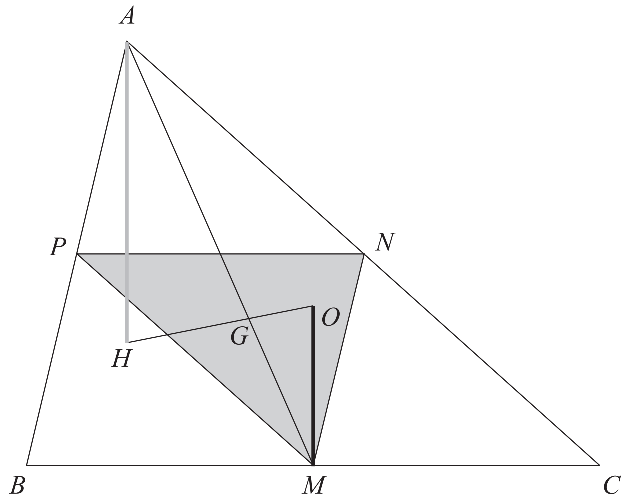
06. Prove que as alturas (ou seus prolongamentos) de um triângulo passam por um mesmo ponto. Esse ponto é chamado *ortocentro* de ABC. *Dica: Seja ABC um triângulo e M, N e P os pontos médios de BC, CA e AB, respectivamente. Os que são as mediatrizes de ABC para MNP?*

07. (Reta de Euler) Esse é um dos resultados mais interessantes da Geometria:

Teorema 4.1. *(Reta de Euler). Em todo triângulo, o ortocentro H, o baricentro G e o circuncentro estão alinhados, nessa ordem. Além disso, $HG = 2 \cdot GO$.*

Prove esse teorema.

Dica: observe a figura a seguir, sendo M, N e P os pontos médios de BC, CA e AB, respectivamente. Considere a cópia $MNPO$ reduzida de $ABCH$. Qual a razão entre AH e MO? Você consegue enxergar alguma semelhança envolvendo O, G e H?



5. Referências bibliográficas

[1] Ian Stewart, *Mania de Matemática*. O título original em inglês é *Math Hysteria (Fun and Games with Mathematics)*. Ambas as demonstrações do teorema de Pitágoras foram extraídas desse livro, que é um livro muito divertido sobre assuntos matematicamente inusitados como calendários, Banco Imobiliário$^{\text{TM}}$, partilhas justas de bolo, o jogo Liga-Ponto, Campo Minado, entre outros.

[2] Kiran Kedlaya, *Notes on Euclidean Geometry*. Este arquivo está disponível em

`http://www.unl.edu/amc/a-activities/a4-for-students/problemtext/geom-080399.ps`

e em

`http://math.mit.edu/ kedlaya/geometryunbound/geom-080399.pdf`

É essencialmente um curso de geometria para olimpíadas. Muitos exercícios foram retirados da primeira seção desse arquivo.

[3] A demonstração da reta de Euler e muito mais está no livro *Geometry Revisited*, de H. S. M. Coxeter e S. L. Greitzer. Esse livro tem um ótimo curso de geometria.