Teorema Chinês dos Restos

...ou, na língua original, "Teolema Chinês dos Lestos".

Se $m_1, m_2, \ldots, m_k$ *são inteiros primos dois a dois, e* $a_1, a_2, \ldots, a_k$ *são inteiros arbitrários, então existe um inteiro* x *tal que* $x \equiv a_i \pmod{m_i}$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Demontração: o caso $k = 2$ é conseqüência imediata da existência de inteiros x e y tais que $\mathrm{mdc}(a, b) = ax + by$. O resto segue por indução. ∎

A seguir, resolvemos um problema da IMO de 1989:

Para cada natural n*, prove que há* n *naturais consecutivos, nenhum dos quais é potência inteira de um número primo.*

Resolução: Sejam p_i primos distintos. Considere o sistema

$$x + i - 1 \equiv 0 \quad (\text{mód. } p_{2i-1} \cdot p_{2i}), \quad 1 \leqslant i \leqslant n$$

Pelo teorema chinês dos restos, ele tem solução. Os números $x + i - 1$ fornecem uma resposta. ∎

(Isto caiu numa IMO? É, não foi um grande ano para a Ciência!)

Exercícios

01. Mostre que existem infinitos conjuntos de 1983 inteiros positivos consecutivos, cada um dos quais é divisível por algum número da forma a^{1983}, onde a é um inteiro positivo.

02. Suponha que o colar A tenha 14 pérolas e o colar B, 19 pérolas. Prove que, para todo inteiro ímpar $n \geqslant 1$, existe uma maneira de numerar cada uma das 33 pérolas com um inteiro da seqüência

$$\{n, n+1, n+2, \ldots, n+32\},$$

de forma que cada inteiro seja usado uma vez, e pérolas adjacentes recebam números primos entre si.

03. O conjunto $S = \{1/r : r = 1, 2, 3, \ldots\}$ contém progressões aritméticas de vários tamanhos. Por exemplo, $(1/20; 1/8; 1/5)$ é uma de tais progressões, de tamanho 3 (e razão $3/40$). Mais ainda, essa é uma *progressão maximal* em S de tamanho 3 pois ela não pode ser estendida à esquerda ou à direita ($-1/40$ e $11/40$ não são elementos de S). Mostre que existe uma progressão maximal em S de tamanho m para todo $m \geqslant 3$.

04. (The big tongue problem) Seja a_n a seqüência definida por

$$a_n = \begin{cases} 1999 & \text{se } n = 1 \\ a_{n-1} + p(n) & \text{se } n > 1 \end{cases},$$

onde $p(n)$ é o menor divisor primo de n. Mostre que a_n possui infinitos múltiplos de 7.

05. Considere a seqüência de inteiros positivos $\{a_n\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, satisfazendo a condição

$$0 < a_{n+1} - a_n \leqslant 2001$$

para todo $n = 1, 2, 3, \ldots$. Prove que existe um número infinito de pares de inteiros positivos $(p; q)$ tais que $p < q$ e a_p é divisor de a_q.

06. Encontre o maior N para o qual existem N inteiros positivos consecutivos tais que a soma dos dígitos primeiro inteiro é divisível por 1, a soma dos dígitos segundo inteiro é divisível por 2, a soma dos dígitos terceiro inteiro é divisível por 3, ..., a soma dos dígitos N-ésimo inteiro é divisível por N.