XXVIII Olimpíada de Matemática do Pacífico-Asiático

7 de Março de 2016

Duração da prova: 4 horas *Cada problema vale 7 pontos*

**** Informe nome completo, data de nascimento e escola.***
** Essa prova também servirá para a seleção da equipe do Brasil na IMO.*
** Os problemas da prova devem ser mantidos CONFIDENCIAIS até eles serem divulgados no website oficial da APMO (`http://apmo.ommenlinea.org`). Não divulgue ou discuta os problemas pela Internet até essa data. Não é permitido o uso de calculadoras.*
**** A primeira página da sua solução de cada um do(s) problema(s) de geometria dessa prova deve ser somente a figura do problema feita com régua e compasso. Caso isso não aconteça, sua pontuação máxima no problema na seletiva será 6 pontos.***

Problema 1. Um triângulo ABC é *ótimo* se tem a seguinte propriedade: para cada ponto D sobre o lado BC, sendo P e Q os pés das perpendiculares de D nas retas AB e AC, respectivamente, então o simétrico de D com relação à reta PQ está sobre o circuncírculo do triângulo ABC.
Prove que o triângulo ABC é *ótimo* se, e somente se, $\angle A = 90°$ e $AB = AC$.

Problema 2. Um inteiro positivo é *chique* se pode ser escrito na forma

$$2^{a_1} + 2^{a_2} + \cdots + 2^{a_{100}},$$

em que $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ são inteiros não negativos, não necessariamente distintos.
Encontre o menor inteiro positivo n para o qual nenhum múltiplo de n é chique.

Problema 3. Sejam AB e AC duas semirretas não contidas na mesma reta, e seja ω um círculo com centro O que é tangente à semirreta AC em E e à semirreta AB em F. Seja R um ponto sobre o segmento EF. A reta que passa por O e é paralela a EF corta a reta AB em P. Sejam N a interseção das retas PR e AC, e M a interseção da reta AB e da reta que passa por R e é paralela a AC. Prove que MN é tangente a ω.

Problema 4. O país dos sonhos consiste de 2016 cidades. A companhia aérea Starways quer estabelecer voo só de ida entre pares de cidades de modo que de cada cidade saia exatamente um voo. Encontre o menor inteiro positivo k para o qual, não importando como a Starways estabelece seus voos, as cidades sempre podem ser particionadas em k grupos de modo que de cada cidade não é possível chegar a outra cidade do mesmo grupo usando no máximo 28 voos.

Problema 5. Seja $\mathbb{R}^+$ o conjunto dos reais positivos. Encontre todas as funções $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tais que

$$(z+1)f(x+y) = f(xf(z)+y) + f(yf(z)+x)$$

para todos reais positivos x, y, z.