THE 3RD ROMANIAN MASTER OF MATHEMATICS COMPETITION

DIA 1: SEXTA-FEIRA, 26 DE FEVEREIRO DE 2010, BUCARESTE

Language: Portuguese

Problema 1. Para cada conjunto finito não vazio P de primos, seja $m(P)$ a maior quantidade possível de inteiros positivos consecutivos, cada um divisível por pelo menos um elemento de P.

(i) Mostre que $|P| \le m(P)$, com igualdade se, e somente se, $\text{mín}(P) > |P|$;

(ii) Mostre que $m(P) < (|P|+1)(2^{|P|}-1)$.

(O número $|P|$ é a quantidade de elementos do conjunto P.)

Problema 2. Para cada inteiro positivo n, encontre o maior real C_n com a seguinte propriedade: dadas quaisquer n funções $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ definidas no intervalo fechado $0 \le x \le 1$ e que assumem valores reais, é possível encontrar números $x_1, x_2, \ldots, x_n$, com $0 \le x_i \le 1$, tais que

$$\left| f_1(x_1) + f_2(x_2) + \cdots + f_n(x_n) - x_1 x_2 \cdots x_n \right| \ge C_n.$$

Problema 3. Seja $A_1A_2A_3A_4$ um quadrilátero convexo cujos lados opostos não são paralelos. Para cada $i = 1, 2, 3, 4$, defina ω_i como o círculo que toca o quadrilátero externamente e é tangente às retas $A_{i-1}A_i$, A_iA_{i+1} e $A_{i+1}A_{i+2}$ (índices são considerados módulo 4, de modo que $A_0 = A_4$, $A_5 = A_1$ e $A_6 = A_2$). Seja T_i o ponto de tangência de ω_i com o lado A_iA_{i+1}. Prove que as retas A_1A_2, A_3A_4 e T_2T_4 são concorrentes se, e somente se, as retas A_2A_3, A_4A_1 e T_1T_3 são concorrentes.

Cada problema vale 7 pontos.
Duração da prova: $4\frac{1}{2}$ horas.