Geometria com Contas

Às vezes precisamos de mais elementos para resolver problemas de geometria. Pode-se traçar novos elementos na figura que possam ajudar ou fazer algumas contas. Mostraremos algumas técnicas para fazer algumas contas que ajudam (e até resolvem!).

Em geral, pode-se pensar em problemas de geometria seguindo esses passos:

(i) Faça a figura do problema (praticamente nenhum problema vem com figura), bem grande e com certa precisão (ou seja, use a régua e o compasso, mas não é necessário muito rigor).

(ii) Mexa um pouco com os elementos da figura. Algo que é sempre útil é fixar um certo número de ângulos (de preferência, o menor número possível, de modo que os ângulos marcados determinem a figura – a não ser, é claro, que acrescentar algum outro ângulo adicione alguma simetria algébrica útil) e calcular todos os outros ângulos possíveis (se os ângulos que você escolheu determinam a figura, é possível calcular todos os outros, de um jeito ou de outro). Procure quadriláteros inscritíveis para ajudar. Se necessário, faça conjecturas (é para isso que você fez um desenho bem feito!). Alguns problemas de geometria já são resolvidos nesse passo!

(iii) Se o problema ainda não foi resolvido, é hora de elaborar uma estratégia para resolver o problema, ou seja, determinar quais cálculos devem ser feitos. Nada de fazer cálculos sem planejá-los!

(iv) Execute sua estratégia. Lembre-se sempre de ter uma meta em mente (algo do tipo "precisamos calcular tal ângulo") e, se você estiver numa prova, de controlar seu tempo e o tamanho da conta (não deixe a conta crescer muito; a falta de controle é um fermento muito poderoso para contas).

É claro que esses passos não são precisos e que, para dominá-los, é preciso muito treino e, por que não, aprender algumas técnicas.

1. Trigonometria

Muitos problemas de geometria podem ser resolvidos com o auxílio da trigonometria. As fórmulas que você deve saber são basicamente essas quatro:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(a+b) &= \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a \\
\operatorname{sen}(a-b) &= \operatorname{sen} a \cos b - \operatorname{sen} b \cos a \\
\cos(a+b) &= \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \\
\cos(a-b) &= \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b
\end{aligned}$$

A partir dessas você pode deduzir essas outras, que na verdade são as mais úteis para nós e que tornam a trigonometria tão poderosa.

Transformando produtos em somas

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b &= \frac{1}{2}\big(\cos(a-b) - \cos(a+b)\big) \\
\cos a \cos b &= \frac{1}{2}\big(\cos(a-b) + \cos(a+b)\big) \\
\operatorname{sen} a \cos b &= \frac{1}{2}\big(\operatorname{sen}(a-b) + \operatorname{sen}(a+b)\big)
\end{aligned}$$

Transformando somas em produtos

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y &= 2 \operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \\
\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y &= 2 \operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right) \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \\
\cos x + \cos y &= 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \\
\cos x - \cos y &= -2 \operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)
\end{aligned}$$

Por fim, relembramos a lei dos senos e a lei dos co-senos. No triângulo ABC, seja $AB = c$, $AC = b$,

$BC = a$, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$ e $\angle C = \gamma$. O circunraio de ABC é R.

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} = 2R$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

A lei dos senos, por envolver proporções (que são mais simples) e elementos adicionais do triângulo (o circunraio), é particularmente útil.

Vamos resolver alguns problemas e mostrar algumas técnicas de cálculo.

1.1. Convenção

Sempre que houver um triângulo ABC, α, β e γ são as medidas dos ângulos $\angle BAC$, $\angle ABC$ e $\angle ACB$, respectivamente.

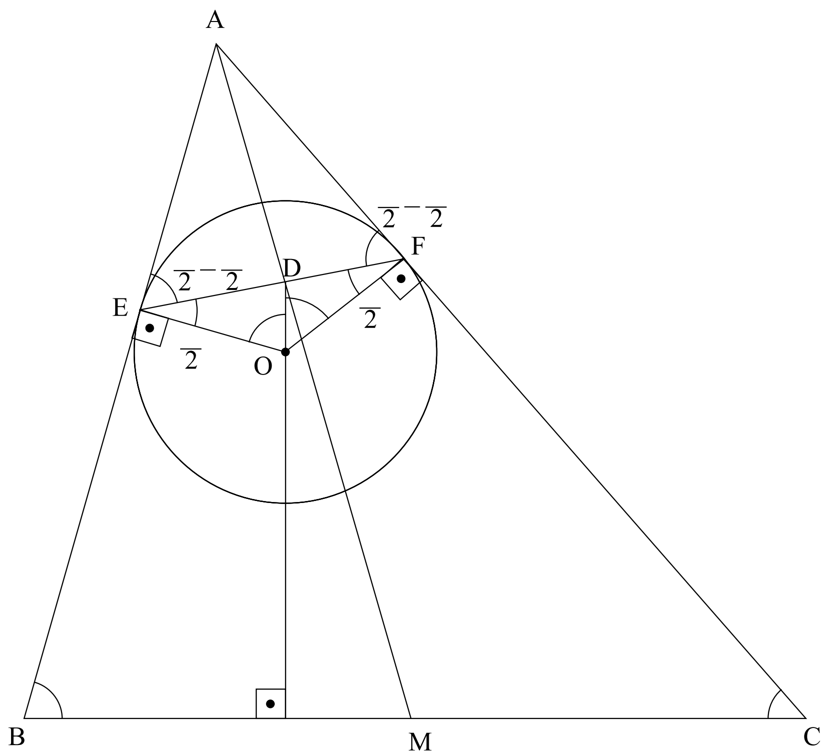
1.2. Um começo e o truque da co-tangente

Exemplo 1.1.

(Prova de Seleção para a IMO) Seja Γ uma circunferência de centro O tangente aos lados AB e AC do triângulo ABC nos pontos E e F. A reta perpendicular ao lado BC por O intercepta EF no ponto D. Mostre que A, D e M (ponto médio de BC) são colineares.

Resolução

Primeiro, um bom desenho, com todos os ângulos que pudermos marcar (a técnica do *arrastão* é bastante útil – é por isso que você deve fazer um desenho grande!!). Note que os ângulos do triângulo ABC já determinam toda a figura (para perceber isso, note que se construir ABC todos os outros elementos da figura já estão determinados).



É sempre bom justificar os cálculos. Seja P a interseção e BC e da reta perpendicular a BC. Como $\angle BEO$ e $\angle BPO$ são retos, o quadrilátero $BPOE$ é inscritível, de modo que $\angle DOE = \angle EBM = \beta$. Analogamente, $\angle DOF = \gamma$.

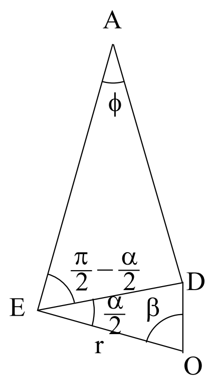
A reta AO é bissetriz e $AOEF$ é inscritível, logo $\angle OEF = \angle OFE = \alpha/2$.

Mas, como provar que A, D e M estão alinhados? Uma maneira é provar que $\angle BAD = \angle BAM$, por exemplo. Para isso, é só calcular os dois ângulos.

Como calcularemos $\phi = \angle BAD$? Veja o triângulo ADE. Sendo r o raio de Γ, com uma lei dos senos calculamos DE. AE pode ser facilmente calculado. Como já conhecemos $\angle AED$ (viu como é bom fazer o arrastão?), temos elementos suficientes para calcular ϕ.

Para calcular $\theta = \angle BAM$, usaremos o triângulo BAM, da qual conhecemos BM, AB e $\angle ABM$.

Já temos uma estratégia. Vamos executar o plano!



No triângulo ODE,

$$\frac{DE}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{r}{\operatorname{sen}(\beta + \frac{\alpha}{2})} \iff DE = \frac{r\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}(\beta+\frac{\alpha}{2})}$$

(note que $\angle ODE = \pi - (\beta + \alpha/2)$ – utilizamos o fato de que $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(\pi - x)$ para todo x real; utilizaremos bastante esse fato e o fato $\operatorname{sen}(\pi/2 - x) = \cos x$)

Sendo o triângulo AEO retângulo em E, obtemos $AE = r\operatorname{cotg}(\alpha/2)$.

No triângulo ADE,

$$\frac{DE}{\operatorname{sen}\phi} = \frac{AE}{\cos(\phi + \frac{\alpha}{2})} \qquad (*)$$

Quando temos uma equação do tipo

$$\frac{a}{\operatorname{sen} x} = \frac{b}{\operatorname{sen}(x+\delta)},$$

e queremos determinar x, utilizamos o *truque da co-tangente*:

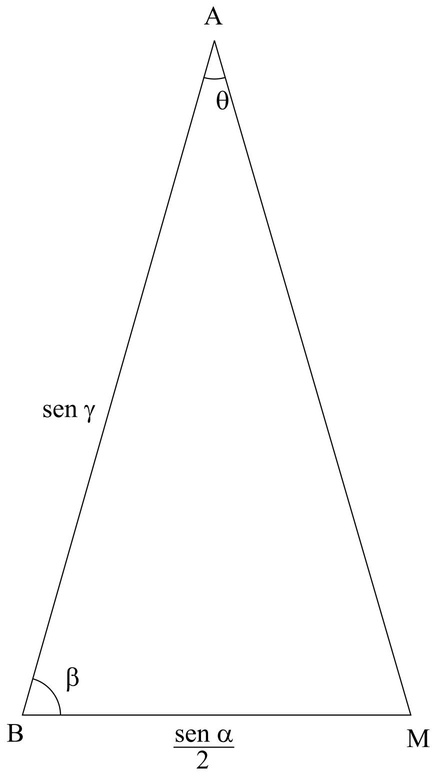
$$\frac{a}{\operatorname{sen} x} = \frac{b}{\operatorname{sen}(x+\delta)} \iff \frac{\operatorname{sen}(x+\delta)}{\operatorname{sen} x} = \frac{b}{a} \iff \frac{\operatorname{sen} x\cos\delta + \operatorname{sen}\delta\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{b}{a} \iff \cos\delta + \operatorname{sen}\delta\operatorname{cotg} x = \frac{b}{a}$$

e podemos isolar $\operatorname{cotg} x$.

Voltemos a $(*)$. Substituindo DE e AE e utilizando o truque da co-tangente, temos

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{cotg}\phi+\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\operatorname{cotg}(\frac{\alpha}{2})\operatorname{sen}(\beta+\frac{\alpha}{2})}{\operatorname{sen}\beta} &\iff \operatorname{cotg}\phi=\frac{\cos(\frac{\alpha}{2})\operatorname{sen}(\beta+\frac{\alpha}{2})-\operatorname{sen}^2(\frac{\alpha}{2})\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}(\frac{\alpha}{2})\operatorname{sen}\beta\cos(\frac{\alpha}{2})}\\
&\iff \operatorname{cotg}\phi=\frac{2\operatorname{sen}(\beta+\frac{\alpha}{2})\cos(\frac{\alpha}{2})-2\operatorname{sen}^2(\frac{\alpha}{2})\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}\\
&\iff \operatorname{cotg}\phi=\frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)+\operatorname{sen}\beta-2\operatorname{sen}^2(\frac{\alpha}{2})\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}\\
&\iff \operatorname{cotg}\phi=\frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)+\operatorname{sen}\beta(1-2\operatorname{sen}^2(\frac{\alpha}{2}))}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}\\
&\iff \operatorname{cotg}\phi=\frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)+\operatorname{sen}\beta\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}\end{aligned}$$

Calculemos θ. Uma prática normal em trigonometria é adotar o circunraio de algum triângulo igual a $1/2$, de modo que, pela lei dos senos, seus lados sejam iguais aos senos dos seus respectivos ângulos opostos. Podemos fazer isso porque estamos só fixando o tamanho da figura. É claro que só podemos fazer isso uma vez só em cada problema.



Nesse caso, façamos isso com $\triangle ABC$. Temos $BM = BC/2 = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\alpha$ e $AB = \operatorname{sen}\gamma = \operatorname{sen}(\alpha+\beta)$. No triângulo ABM,

$$\frac{BM}{\operatorname{sen}\theta}=\frac{AB}{\operatorname{sen}(\theta+\beta)} \iff \operatorname{sen}\beta\operatorname{cotg}\theta+\cos\beta=\frac{2\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\operatorname{sen}\alpha} \iff \operatorname{cotg}\theta=\frac{2\operatorname{sen}(\alpha+\beta)-\operatorname{sen}\alpha\cos\beta}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}$$

Puxa, os resultados de $\operatorname{cotg}\phi$ e $\operatorname{cotg}\theta$ são diferentes! Na verdade, não são. Nunca perca a fé!

$$\begin{aligned}\operatorname{cotg}\phi=\operatorname{cotg}\theta &\iff \operatorname{sen}(\alpha+\beta)+\operatorname{sen}\beta\cos\alpha=2\operatorname{sen}(\alpha+\beta)-\operatorname{sen}\alpha\cos\beta\\
&\iff \operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\beta\cos\alpha,\end{aligned}$$

que é sempre verdade. ∎

1.3. Algumas identidades

Suponha que o circunraio do triângulo ABC é $R = 1/2$. Então, $c = AB = \operatorname{sen}\gamma$, $b = AC = \operatorname{sen}\beta$ e $a = BC = \operatorname{sen}\alpha$. Além disso, por exemplo,

- O perímetro do triângulo é $2p = 4\cos(\frac{\alpha}{2})\cos(\frac{\beta}{2})\cos(\frac{\gamma}{2})$;

- A área do triângulo é $S = \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma/2$;

- O inraio do triângulo é $r = 2\operatorname{sen}(\frac{\alpha}{2})\operatorname{sen}(\frac{\beta}{2})\operatorname{sen}(\frac{\gamma}{2})$;

- $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + r/R$;

- $p - a = 2\cos(\frac{\alpha}{2})\operatorname{sen}(\frac{\beta}{2})\operatorname{sen}(\frac{\gamma}{2})$.

01. Prove todas as identidades acima.

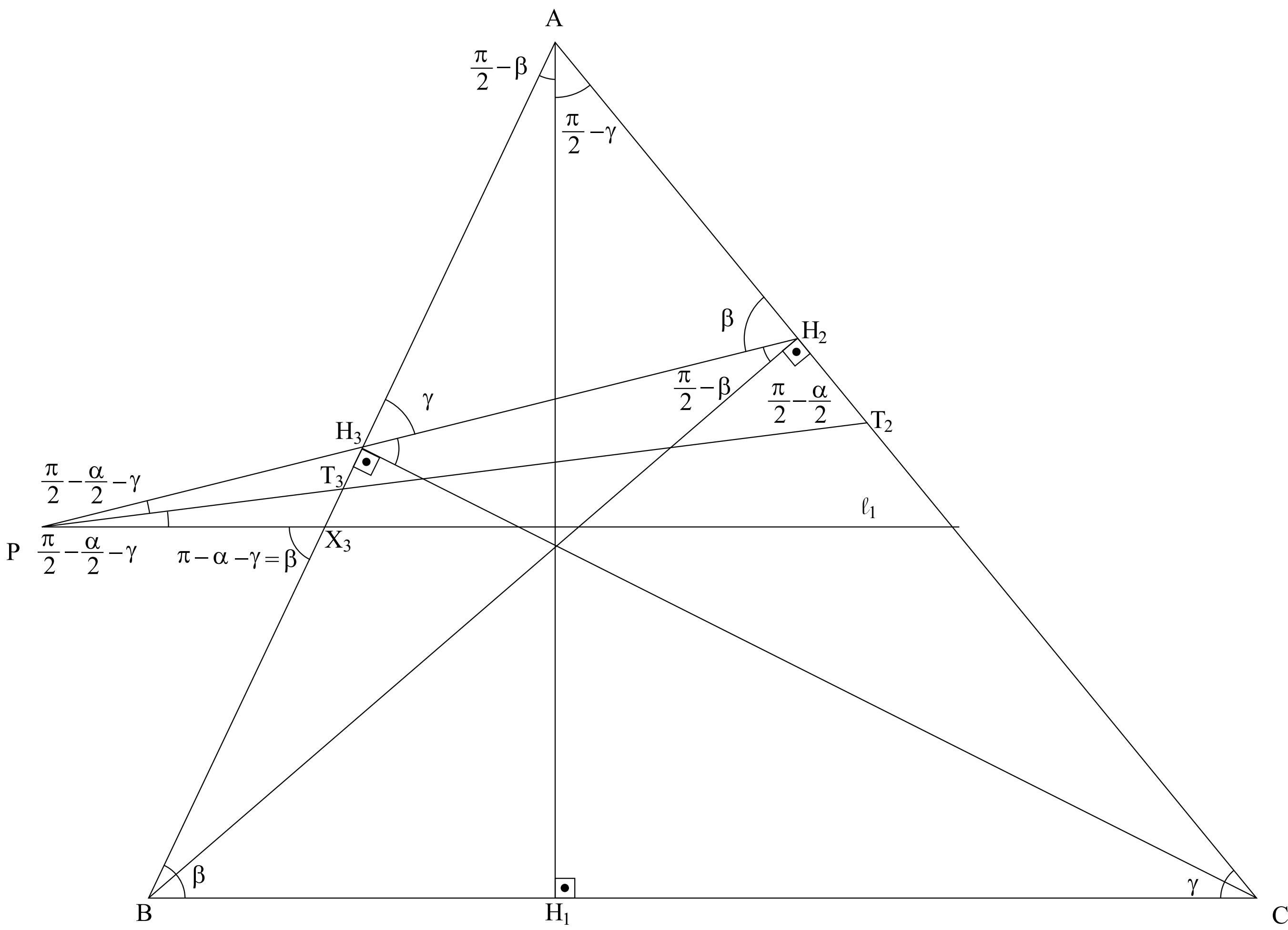
Exemplo 1.2.

(IMO) Sejam AH_1, BH_2 e CH_3 as alturas de um triângulo acutângulo ABC. A circunferência inscrita no triângulo ABC é tangente aos lados BC, CA, AB em T_1, T_2 e T_3, respectivamente. Considere a reta simétrica da reta H_1H_2 relativamente à reta T_1T_2, a reta simétrica da reta H_2H_3 relativamente à reta T_2T_3, a reta simétrica da reta H_1H_3 relativamente à reta T_1T_3. Prove que estas retas simétricas determinam um triângulo cujos vértices pertencem à circunferência inscrita no triângulo ABC.

Resolução

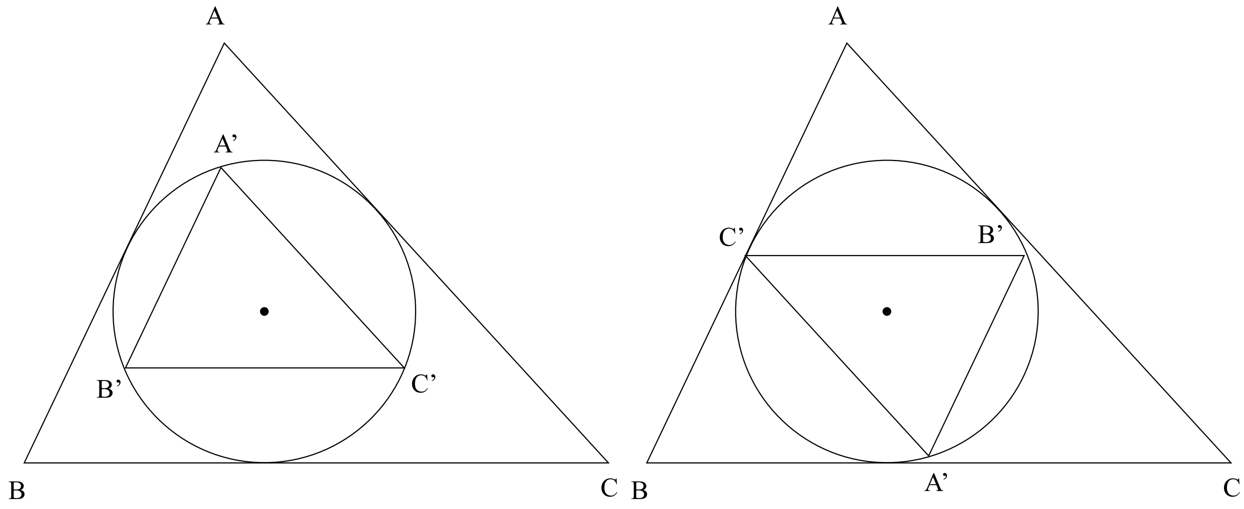
Esse é o único problema 6 de IMO de geometria euclidiana nos últimos 10 anos.

Primeiro, uma boa, e bem grande, figura. Vamos só desenhar a reta simétrica relacionada a T_2T_3. H é o ortocentro de ABC.



Façamos o arrastão: veja que AH_2HH_3 é inscritível, logo $\angle AH_3H_2 = \gamma$. Seja P a interseção de T_2T_3 e H_2H_3 (só não podemos escolher duas retas T_iT_j e H_iH_j concorrentes quando o triângulo ABC é equilátero; tal caso é trivial). Como $AT_2 = AT_3$, os ângulos $\angle AT_2T_3$ e $\angle AT_3T_2$ medem ambos $\pi/2 - \alpha/2$. Assim, $\angle H_3PT_3 = \angle AT_3T_2 - \angle PH_3T_3 = \pi - \alpha/2 - \gamma$ e, sendo ℓ_1 a reta simétrica da reta H_2H_3 relativamente à reta T_2T_3, o ângulo entre ℓ_1 e T_2T_3 é igual também a $\pi - \alpha/2 - \gamma$. Logo o ângulo entre ℓ_1 e AB é $2(\pi/2-\alpha/2-\gamma)+\gamma = \pi-\alpha-\gamma = \beta$, ou seja, ℓ_1 e BC são paralelos. Definindo analogamente ℓ_2 e ℓ_3, temos $\ell_2 \mathbin{/\!/} AC$ e $\ell_3 \mathbin{/\!/} AB$.

Com isso, já sabemos que o triângulo determinado por ℓ_1, ℓ_2 e ℓ_3 é semelhante a ABC, e com lados homólogos paralelos. Temos, então, dois candidatos a tal triângulo:



Estudando um caso particular (o triângulo equilátero, por exemplo), vemos que o candidato mais indicado é o da direita. Podemos, então, calcular a distância entre lados homólogos nessa situação e compararmos com a distância entre BC e ℓ_1.

Assuma que o circunraio de ABC é $1/2$, para termos $BC = \operatorname{sen}\alpha$, $CA = \operatorname{sen}\beta$ e $BC = \operatorname{sen}\alpha$.

Vamos calcular a distância entre BC e ℓ_1. Seja X_3 a interseção de ℓ_1 e AB. A distância de A a ℓ_1 é $AX_3 \operatorname{sen}\beta$. E a distância desejada é $AH_1 - AX_3 \operatorname{sen}\beta$. Bom, AH_1 é fácil de calcular: $AH_1 = AB \operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}\gamma \operatorname{sen}\beta$. E AX_3? AH_3 é fácil de calcular, AT_3 também. Podemos calcular $H_3T_3 = AT_3 - AH_3$ e usar a lei dos senos no triângulo PH_3X_3, com a ceviana PT_3. Mãos à obra!!

Para começar, $AH_3 = AC\cos\alpha = \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$ e $AT_3 = p - \operatorname{sen}\alpha$, sendo p o semiperímetro de ABC. Portanto $H_3T_3 = p - \operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$.

Pela lei dos senos no triângulo PH_3T_3,

$$\frac{PT_3}{\operatorname{sen}\gamma} = \frac{H_3T_3}{\operatorname{sen}\angle H_3PT_3}$$

No triângulo PT_3X_3,

$$\frac{PT_3}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{X_3T_3}{\operatorname{sen}\angle X_3PT_3}$$

Dividindo as duas últimas equações e tendo em vista que $\angle H_3PT_3 = \angle X_3PT_3$, obtemos

$$X_3T_3 = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\beta} H_3T_3 = \frac{p\operatorname{sen}\gamma - \operatorname{sen}\gamma\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\gamma\operatorname{sen}\beta\cos\alpha}{\operatorname{sen}\beta}$$

Da lei dos co-senos (ela também é útil de vez em quando!),

$$\operatorname{sen}\gamma\operatorname{sen}\beta\cos\alpha = \frac{\operatorname{sen}^2\beta + \operatorname{sen}^2\gamma - \operatorname{sen}^2\alpha}{2}$$

Logo, substituindo $p = \frac{\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\gamma}{2}$,

$$\begin{aligned} X_3T_3 &= \frac{-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\gamma + \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma + \operatorname{sen}^2\gamma - \operatorname{sen}^2\beta - \operatorname{sen}^2\gamma + \operatorname{sen}^2\alpha}{2\operatorname{sen}\beta} \\ &= \frac{-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\gamma + \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma - \operatorname{sen}^2\beta + \operatorname{sen}^2\alpha}{2\operatorname{sen}\beta} \end{aligned}$$

Enfim, podemos calcular $AX_3 = AT_3 + X_3T_3$. Veja que $AT_3 = p - \operatorname{sen}\alpha = \frac{-\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta+\operatorname{sen}\gamma}{2}$.

$$\begin{aligned}
AX_3 &= \frac{\operatorname{sen}\beta(-\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta+\operatorname{sen}\gamma)-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\gamma+\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma-\operatorname{sen}^2\beta+\operatorname{sen}^2\alpha}{2\operatorname{sen}\beta}\\
&= \frac{-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta+2\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\gamma+\operatorname{sen}^2\alpha}{2\operatorname{sen}\beta}
\end{aligned}$$

Enfim, a distância entre ℓ_1 e BC é

$$\begin{aligned}
AH_1 - AX_3\operatorname{sen}\beta &= \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma - \frac{-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta+2\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\gamma+\operatorname{sen}^2\alpha}{2}\\
&= \frac{\operatorname{sen}\alpha(-\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta+\operatorname{sen}\gamma)}{2}
\end{aligned}$$

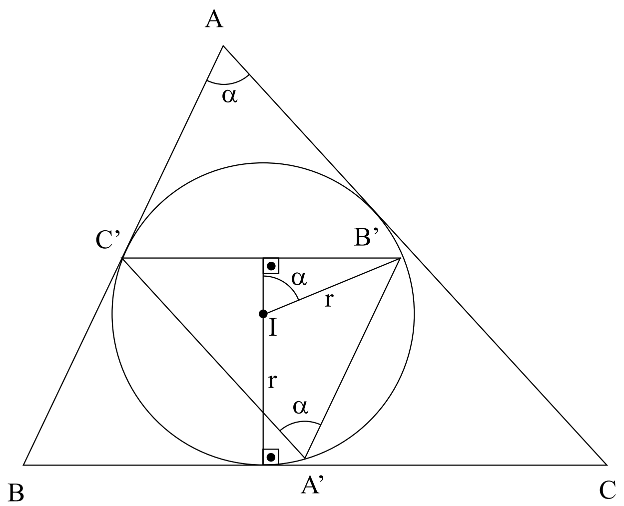
Na seção de identidades, você deve provar que

$$p - a = 2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$

Logo a distância entre ℓ_1 e BC é (ufa!)

$$d = 2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\gamma}{2}\right)\operatorname{sen}\alpha$$

Agora calculemos a distância entre os lados homólogos dos triângulos ABC e o de lados respectivamente paralelos aos lados de ABC.



Seja I o incentro do triângulo ABC. A distância de I a BC é igual ao inraio r e a distância de I a $B'C'$ é $r\cos\alpha$. Assim, a distância entre BC e $B'C'$ é

$$d' = r + r\cos\alpha = r(1+\cos\alpha) = 2r\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Você tem outra identidade para provar:

$$r = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$

Logo

$$\begin{aligned}
d' &= 2 \cdot 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\gamma}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\
&= 2 \cdot 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\gamma}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\
&= 2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\gamma}{2}\right) \operatorname{sen} \alpha = d
\end{aligned}$$

Conseqüentemente, ℓ_1 contém $B'C'$. Analogamente (ou você acha que eu faria todas as contas de novo?), ℓ_2 contém $A'C'$ e ℓ_3 contém $A'B'$. ∎

Às vezes traçar novos elementos na figura também ajuda.

Exemplo 1.3.

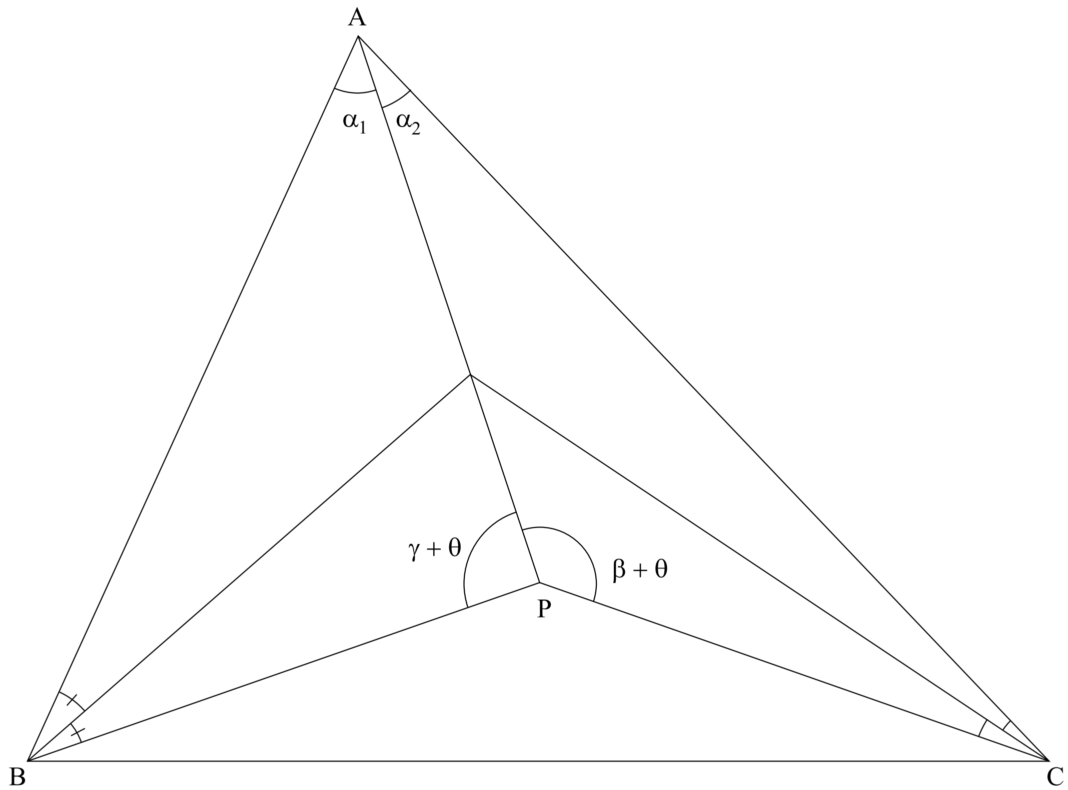
(IMO) Seja P um ponto interior ao triângulo ABC tal que

$$\angle APC - \angle ABC = \angle APB - \angle ACB$$

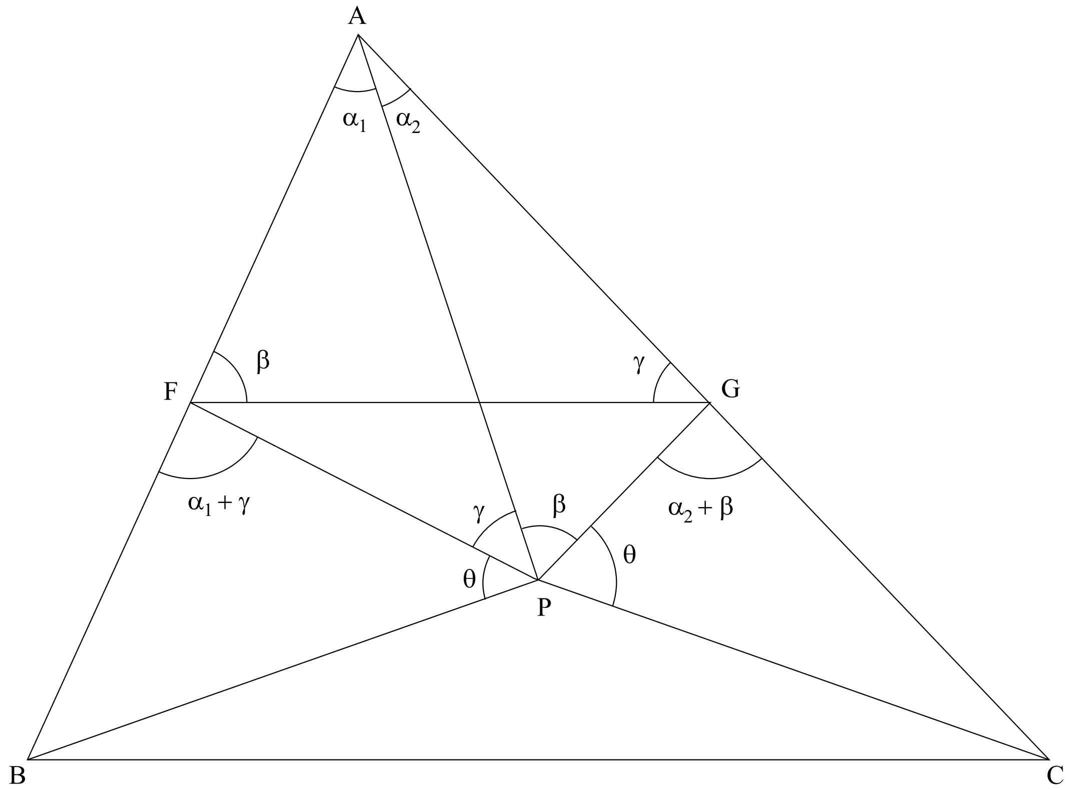
Sejam D e E os incentros dos triângulos APB e APC, respectivamente. Prove que as retas BD, CE e AP passam por um ponto comum.

Resolução

Seja $\theta = \angle APC - \angle ABC = \angle APB - \angle ACB$.



Veja que podemos "separar" θ de β e γ. Note que se θ ficar "para baixo" obtemos um quadrilátero inscritível, então faremos isso.



O quadrilátero $AFPG$ é inscritível, logo $\angle AFG = \beta$, ou seja, $FG \parallel BC$.

O problema pede, na verdade, para provarmos que as bissetrizes de $\angle ACP$ e $\angle ABP$ se encontram sobre AP. Sejam Q e R as interseções de BD e CE com AP. Devemos ter $Q = R$. Do teorema das bissetrizes,

$$\frac{AQ}{QP} = \frac{AB}{BP} \quad \text{e} \quad \frac{AR}{RP} = \frac{AC}{CP}$$

Como

$$Q = R \iff AQ = AR \iff \frac{AQ}{AP - AQ} = \frac{AR}{AP - AR} \iff \frac{AQ}{QP} = \frac{AR}{RP},$$

é suficiente demonstrarmos que

$$\frac{AB}{BP} = \frac{AC}{CP}$$

Vamos, então, calcular BP e CP. Sendo FG paralela a BC, temos $FB = k \cdot AB$ e $GC = k \cdot AC$. Aplicando a lei dos senos ao triângulo BFP, temos

$$\frac{BP}{\operatorname{sen}(\alpha_1 + \gamma)} = \frac{FB}{\operatorname{sen}\theta} \iff BP = \frac{k \cdot AB \operatorname{sen}(\alpha_1 + \gamma)}{\operatorname{sen}\theta} \iff \frac{AB}{BP} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{k \operatorname{sen}(\alpha_1 + \gamma)}$$

Analogamente,

$$\frac{AC}{CP} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{k \operatorname{sen}(\alpha_2 + \beta)}$$

Como $\alpha_1 + \gamma$ e $\alpha_2 + \beta$ somam π, o resultado está demonstrado. ∎

2. Geometria Analítica

Quando aparecem problemas com muitos ângulos retos e que envolvam só retas, geometria analítica às vezes é indicada.

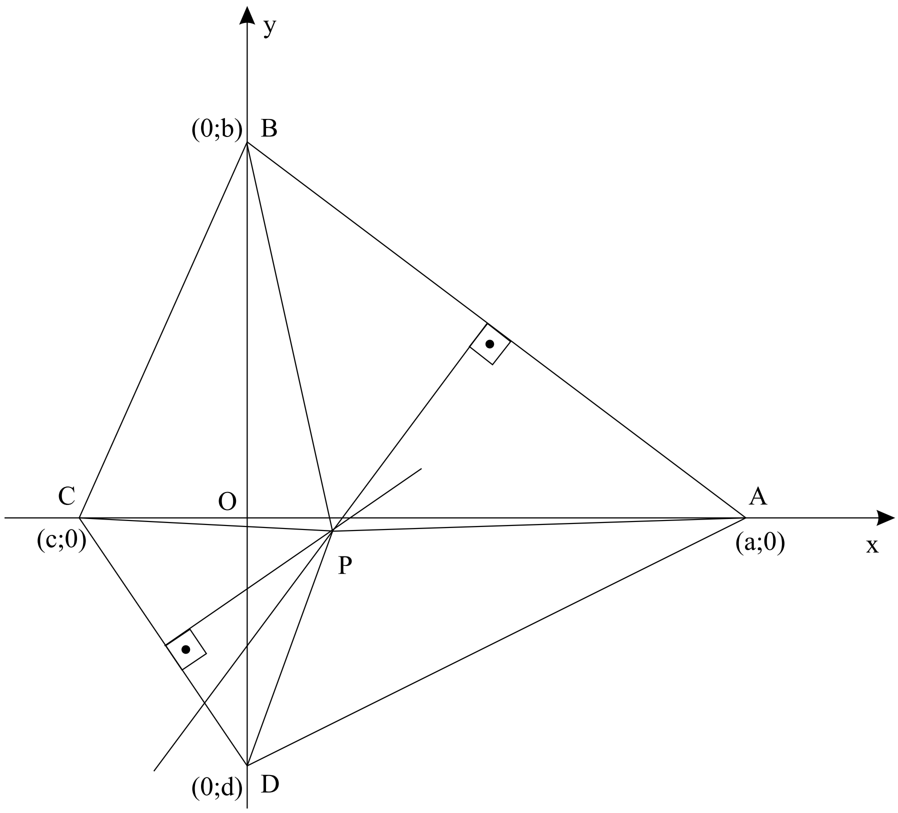
Exemplo 2.1.

(IMO) No quadrilátero convexo $ABCD$, as diagonais AC e BD são perpendiculares e os lados opostos AB e CD não são paralelos. Sabemos que o ponto P, onde se intersectam as mediatrizes de AB e CD, está no interior de $ABCD$.

Prove que $ABCD$ é um quadrilátero cíclico se, e somente se, os triângulos ABP e CDP têm áreas iguais.

Resolução

Esse problema é perfeito para se resolver com geometria analítica: é muito fácil colocar as coisas nos eixos (tome como eixos as diagonais); tudo é muito fácil de calcular analiticamente (mediatrizes e áreas); e, por fim, a única condição que poderia complicar, que é saber quando $ABCD$ é cíclico, pode ser facilmente transformada na potência da interseção das diagonais em relação ao seu circuncírculo.



Sejam, então, $A = (a; 0)$, $B = (0; b)$, $C = (c; 0)$ e $D = (0; d)$. O quadrilátero $ABCD$ é inscritível se, e somente se, $OA \cdot OC = OB \cdot OD \iff ac = bd$. Fácil, não?

Seja $P = (x; y)$. Como P pertence às mediatrizes de AB e CD, temos $PA = PB$ e $PC = PD$.

$$PA = PB \iff (x-a)^2 + (y-0)^2 = (x-0)^2 + (y-b)^2 \iff 2ax - a^2 = 2by - b^2$$

Analogamente, $PC = PD \iff 2cx - c^2 = 2dy - b^2$. Resolvendo o sistema obtido, temos

$$\left|\begin{array}{l} 2ax - 2by = a^2 - b^2 \\ 2cx - 2dy = c^2 - d^2 \end{array}\right. \iff \left|\begin{array}{l} x = \frac{(a^2-b^2)d-(c^2-d^2)b}{2(ad-bc)} \\ y = \frac{(a^2-b^2)c-(c^2-d^2)a}{2(ad-bc)} \end{array}\right.$$

Tudo bem com os denominadores pois, como AB e CD não são paralelos, $OA/OB \neq OC/OD \iff a/b \neq c/d \iff ad - bc \neq 0$ (nunca se esqueça de verificar quando os denominadores são nulos; essa verificação às vezes faz você perceber que tem que estudar alguns casos em separado).

A área do triângulo PAB é igual a $|D|/2$, em que

$$D = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 \end{vmatrix} = -ay - bx + ab$$

Da mesma forma, a área do triângulo PCD é igual a $|D'|/2$, em que

$$D' = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ c & 0 & 1 \\ 0 & d & 1 \end{vmatrix} = -cy - dx + cd$$

Assim, devemos ter

$$|-ay - bx + ab| = |-cy - dx + cd|$$

Seria muito bom nos livrarmos do módulo. O sinal de D depende da ordem em que colocamos as coordenadas no determinante. Se os pontos correspondentes estão dispostos no sentido anti-horário, D é positivo; se estão no sentido horário, é negativo. Como P pertence ao interior de $ABCD$, PAB e PCD têm a mesma orientação, de modo que realmente podemos nos livrar do módulo. Logo, tirando o módulo e substituindo x e y, temos que as áreas de PAB e PCD são iguais se, e somente se,

$$(a-c)\frac{(a^2-b^2)c-(c^2-d^2)a}{2(ad-bc)} + (b-d)\frac{(a^2-b^2)d-(c^2-d^2)b}{2(ad-bc)} = ab - cd \qquad (**)$$

Nada de abrir tudo com pressa! Queremos $ac = bd$, e isso significa que provavelmente em algum momento fatoraremos a equação com $ac - bd$ como um dos fatores.

$$\begin{aligned}
(**) &\iff (a^2-b^2)(ac+bd-c^2-d^2) + (c^2-d^2)(ac+bd-a^2-b^2) = 2(ab-cd)(ad-bc) \\
&\iff (ac+bd)(a^2+c^2-b^2-d^2) - a^2c^2 - a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 - a^2c^2 - b^2c^2 + a^2d^2 + b^2d^2 \\
&\qquad = 2(a^2bd - ab^2c - acd^2 + bc^2d) \\
&\iff ac(a^2+c^2) - bd(b^2+d^2) - acb^2 - acd^2 + bda^2 + bdc^2 + 2(a^2c^2 - b^2d^2) \\
&\qquad = 2(a^2bd - ab^2c - acd^2 + bc^2d) \\
&\iff ac(a^2+c^2) - bd(b^2+d^2) - (-acb^2 - acd^2 + bda^2 + bdc^2) + 2(a^2c^2 - b^2d^2) = 0 \\
&\iff ac(a^2+c^2) - bd(b^2+d^2) + ac(b^2+d^2) - bd(a^2+c^2) + 2(ac-bd)(ac+bd) = 0 \\
&\iff (ac-bd)(a^2+b^2+c^2+d^2) - (ac-bd)(2ac+2bd) = 0 \\
&\iff (ac-bd)((a-c)^2+(b-d)^2) = 0 \\
&\iff ac = bd \text{ ou } (a = c \text{ e } b = d)
\end{aligned}$$

Não é possível termos $a = c$ e $b = d$ pois já vimos que $ad \neq bc$. Logo as áreas de PAB e PCD são iguais se, e somente se, $ac = bd$. ∎

A geometria analítica tem uma pequena desvantagem: não passa de aplicações extensivas do teorema de Pitágoras. Apesar de Pitágoras resolver problemas como o que acabamos de ver, mesclar um pouco as contas com trigonometria e números complexos pode vir a calhar.

Agora, alguns problemas para você pensar.

02. Seja ABC um triângulo acutângulo, M o ponto médio do segmento BC, P o ponto sobre o segmento AM tal que $PM = BM$, H o pé da perpendicular de P a BC, Q o ponto de interseção entre o segmento

AB e a reta que passa através de H e é perpendicular a PB e, finalmente, R o ponto de interseção entre o segmento AC e a reta que passa através de H e é perpendicular a PC. Mostre que o circuncírculo do triângulo QHR é tangente a BC no ponto H.

03. No triângulo ABC, $AB = AC$. D é um ponto sobre o lado BC tal que $BD = 2CD$. Se P é o ponto de AD tal que $\angle ABP = \angle PAC$, prove que $2\angle DPC = \angle BAC$.

04. Um quadrilátero convexo está inscrito em uma circunferência de raio unitário. Demonstre que a diferença entre seu perímetro e a soma das diagonais é maior do que zero e menor do que 2.

05. (IMO) O prolongamento da bissetriz AL do triângulo acutângulo ABC intercepta a circunferência circunscrita no ponto N. A partir do ponto L traçam-se perpendiculares LK e LM aos lados AB e AC, respectivamente. Prove que a área do triângulo ABC é igual a área do quadrilátero $AKNM$.

06. (Ibero) A circunferência inscrita no triângulo ABC é tangente aos lados BC, CA e AB nos pontos D, E e F, respectivamente. AD corta a circunferência num segundo ponto Q. Demonstrar que a reta EQ passa pelo ponto médio de AF se, e somente se, $AC = BC$.

07. (IMO) Seja I o incentro do triângulo ABC. A circunferência inscrita no triângulo ABC é tangente aos lados BC, CA e AB nos pontos K, L e M, respectivamente. A reta que passa por B, paralela ao segmento MK, intercepta as retas LM e LK nos pontos R e S, respectivamente. Prove que o ângulo $\angle RIS$ é agudo.

08. (Vietnã) Seja ABC um triângulo e A', B', C' pontos médios dos arcos BC, AC e AB do circuncírculo de ABC, respectivamente. As retas $A'B'$ e $A'C'$ interceptam o lado BC em M e N, respectivamente. Defina os pares de pontos P, Q e R, S analogamente. Prove que $MN = PQ = RS$ se, e somente se, ABC é equilátero.

09. (IMO) Seja ABC um triângulo acutângulo com circuncentro O. Seja PA uma altura do triângulo com P no lado BC.

Considere que $\angle BCA \geq \angle ABC + 30°$.

Prove que $\angle CAB + \angle COP < 90°$.

10. (IMO) Num triângulo ABC, seja AP a bissetriz de $\angle BAC$ com P no lado BC, e seja BQ a bissetriz de $\angle ABC$ com Q no lado CA.

Sabemos que $\angle BAC = 60°$ e que $AB + BP = AQ + QB$.

Quais são os possíveis valores dos ângulos do triângulo ABC?

11. (Coréia) Sejam R e r o circunraio e o inraio, respectivamente, do triângulo ABC, e R' e r' o circunraio e o inraio, respectivamente, do triângulo $A'B'C'$. Prove que se $\angle C = \angle C'$ e $Rr' = R'r$ então os triângulos são semelhantes.

12. (Turquia) Sejam A_C e P_C a área e o perímetro, respectivamente, do quadrilátero cíclico C. Se a área e o perímetro do quadrilátero cujos lados são tangentes ao circuncírculo de C são A_T e P_T, respectivamente, prove que

$$\frac{A_C}{A_T} \geq \left(\frac{P_C}{P_T}\right)^2$$

13. (EUA) Seja $ABCD$ um trapézio isósceles com $AB \parallel CD$. O incírculo do triângulo BCD toca CD em E. Seja F um ponto da bissetriz de $\angle DAC$ tal que $EF \perp CD$. O circuncírculo do triângulo ACF corta a reta CD em C e G. Mostre que o triângulo AFG é isósceles.

14. (Balcânica, adaptado) Seja ABC um triângulo acutângulo e M, N e P as projeções ortogonais do baricentro de ABC sobre seus lados. Prove que

$$\frac{2}{9} < \frac{[MNP]}{[ABC]} \leq \frac{1}{4}$$

($[XYZ]$ é a área do triângulo XYZ)

15. (Ibero) Dados dois círculos ω_1 e ω_2, dizemos que ω_1 *bissecta* ω_2 quando se intersectam e a corda comum é um diâmetro de ω_2. Se ω_1 e ω_2 são idênticas, dizemos que ω_1 e ω_2 bissectam-se mutuamente. Considere dois círculos fixos e não concêntricos ω_1 e ω_2.

(a) Mostre que há infinitos círculos ω que bissectam tanto ω_1 como ω_2.

(b) Encontre o lugar geométrico do centro de ω.

16. (Ibero) Seja ABC um triângulo acutângulo com circuncírculo ω centrado em O. Seja AD, BE e CF as alturas de ABC. A reta EF corta ω em P e Q.

(a) Prove que $AO \perp PQ$.

(b) Se M é o ponto médio de BC, prove que

$$AP^2 = 2AD \cdot OM$$

17. (São Petersburgo) Seja AL uma bissetriz interna do triângulo ABC, com L sobre BC. As retas paralelas ℓ_1 e ℓ_2 passam por B e C, respectivamente, e são equidistantes de A. Os pontos M e N pertencem a ℓ_1 e ℓ_2, respectivamente, e são tais que os pontos médios de LM e LN pertencem a AB e AC, respectivamente. Prove que $LM = LN$.